数学物理方法 / 数学物理方程篇

数学物理方程篇·第一章学习讲义

数学物理中的偏微分方程

基本概念 → 微元建模 → 初值与边界 → 达朗贝尔公式 → 叠加与齐次化。按教材顺序展开概念、例题、证明主线与解题条件；每章附原书习题路线和自编检查题。

严镇军教材配套讲读　教材205—236页　24道自编检查题　离线SVG公式与图解

从这一章开始，教材进入第二部分，章号重新从1开始。前面的“复变函数第一章”和本章是不同章节，文件名、目录和图号会明确区分。

这一章最重要的能力，是把一段物理描述翻译成完整的定解问题：未知量是什么、在哪个区域满足什么方程、开始时怎样、边界上怎样。 暂时不要求看到任何偏微分方程都能解；先把模型和条件写对，再学达朗贝尔公式、叠加与齐次化这些解题工具。

对应原书印刷页205—236，扫描PDF第211—242页。正文205—234页上部，习题234—236页。按原书1.1基本概念、1.2典型方程、1.3定解条件、1.4解法、1.5两条原理的顺序重新讲解；为便于阅读拆成十节。保留主要例题、证明主线和星号内容，并说明第一轮的掌握边界。

本章学完应能独立完成：判阶数、线性与齐次性；从受力或守恒写出方程；正确区分波动和热传导的初值数量；把固定、绝热、给定通量、热交换写成边界条件；用达朗贝尔公式解全直线初值题；用特解或时间积分处理非齐次项。后面附原书1—12题的路线，以及24道独立编号的自编检查题和完整解析。

学习顺序：先跟着例题写关键步骤，再独立完成检查题，最后按习题路线回到原书。证明段落均说明用途，不要求第一轮逐行背诵。

本章目录

1.1 偏微分方程与解的基本概念	教材205—209页
1.2 典型方程与弦振动模型	教材209—212页
1.3 热传导扩散与稳态方程	教材212—215页
1.4 静电势与电磁场的方程	教材215—217页
1.5 初始边界条件与定解问题	教材217—222页
1.6 弦端条件与适定性	教材223—225页上部
1.7 达朗贝尔公式与广义解	教材225—228页
1.8 叠加原理特解与齐次化	教材228—234页
1.9 原书习题路线与公式速查	教材234—236页
1.10 二十四道自编检查题与完整解析	全章复习

数学物理方程篇·第一章 / 1.1

偏微分方程与解的基本概念

教材205—209页

1.1 · 教材205—209页

01 一个未知函数依赖多个变量，求导时先说固定谁

弦的位移写成$u(t,x)$：固定x看t，研究某个位置如何运动；固定t看x，研究这一时刻弦的形状。偏导数u_t与u_x正是这两种不同变化率。

含未知多元函数及其偏导数的关系式叫偏微分方程。常微分方程中的未知量通常依赖一个自变量；这里多个自变量使解的自由度更大，不能只靠几个常数描述所有可能状态。

例如$u_t=\kappa u_{xx}$中的t是时间，x是空间；$u_{xx}+u_{yy}=0$中x,y都是空间。**判断需要什么初始条件时，要看时间导数阶数，不能只看整个方程最高阶。**

1.1 · 教材205—209页

02 阶数线性齐次：三个问题分开判断

阶数是出现的最高阶偏导数。$u_t+uu_x=0$是一阶方程；$u_t+6uu_x+u_{xxx}=0$是三阶方程，原书用它说明并非只研究二阶模型。

线性要求未知函数及其导数以一次线性组合出现，系数只能依赖已知自变量。例如

$$a(t,x)u_{xx}+b(t,x)u_x+c(t,x)u=f(t,x)$$

是线性方程；uu_x、$(u_x)^2$、$\sin u$则使它非线性。变量系数不等于非线性，常系数也不自动保证线性。

对线性方程，把全部含u的项放在左边，写成$Lu=f$。若$f\equiv 0$，称齐次；否则非齐次。$u_t+u=0$虽有u本身，仍是齐次。齐次性不是“式子里有没有常数系数”。

方程	阶数	线性	齐次性
$u_t-a^2u_{xx}=0$	二阶	线性	齐次
$u_t-a^2u_{xx}=3x^2$	二阶	线性	非齐次
$u_t+uu_x=0$	一阶	非线性	本章不套线性齐次分类
$u_t+6uu_x+u_{xxx}=0$	三阶	非线性	本章不套线性叠加原理

1.1 · 教材205—209页

03 拉普拉斯算子：把空间方向的二阶导数相加

常用记号为

$$\Delta_2 u = u_{xx} + u_{yy}, \qquad \Delta_3 u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}.$$

下标表示空间维数，不把时间算进去。三维波动方程$u_{tt} = a^2 \Delta_3 u$有四个自变量，但空间拉普拉斯仍是Δ_3。

教材给出一般二阶线性常系数算子

$$Lu = \sum_{i,j} a_{ij} u_{x_i x_j} + 2\sum_i b_i u_{x_i} + cu.$$

这里$a_{ij} = a_{ji}$可通过合并混合导数实现。第一轮不必背全部下标；需要理解“线性算子”就是把求导、乘已知系数、相加打包成一个符号。后面叠加原理靠的就是$L(\alpha u + \beta v) = \alpha Lu + \beta Lv$。

1.1 · 教材205—209页

04 什么叫一个解：代入以后在指定区域内成立

给定函数能满足方程，就称它是一个解。必须同时说明区域和光滑性，奇点处不能默认也满足。

三维中$u = 1/r$，r为到某个固定点的距离，在$r > 0$满足$\Delta_3 u = 0$；在源点$r = 0$无定义。二维$\ln r$也在$r > 0$调和。把源点偷偷包括进去，会把物理点源与无源区混为一谈。

原书例1设$u = e^{ax+by}$代入二维拉普拉斯方程：

$$\Delta_2 u = (a^2 + b^2) e^{ax+by}.$$

所以条件为$a^2 + b^2 = 0$。若a, b都限为实数，只能$a = b = 0$；要得到非平凡的纯指数形式，通常允许其中一个参数为虚数。再取实部、虚部，可以得到

$$e^{ky}\cos kx, \quad e^{ky}\sin kx, \quad e^{kx}\cos ky, \quad e^{kx}\sin ky.$$

这些都是真实的调和函数。不要同时说“a, b是实数”又未经解释写$a = \pm ib$。

1.1 · 教材205—209页

05 积分常数变成任意函数：原书例2

对$u_y = f(x)$，因为求导时固定x，积分得

$$u(x, y) = y f(x) + C(x).$$

“常数”只是不依赖被积分变量y，仍可任意依赖x。原书的$u_{xy}=0$先变成$\partial_x(u_y)=0$，所以$u_y=A(y)$，再积分得到

$$u(x,y)=F(x)+G(y).$$

每次积分都要保留其他变量的自由函数。这类题比复杂方程更适合检查是否理解偏导数。

任意函数的数目与方程阶数有联系，但不能把“一阶一个、二阶两个”当成所有PDE、所有区域的无条件定理。这里它解释几个可直接积分的例子，具体模型还要结合条件。

1.1 · 教材205—209页

06 波动方程的两个行波：原书例3

对$u_{tt}=a^2u_{xx}$，$a>0$，令

$$\xi=x+at,\qquad \eta=x-at,\qquad u(t,x)=U(\xi,\eta).$$

链式法则给出

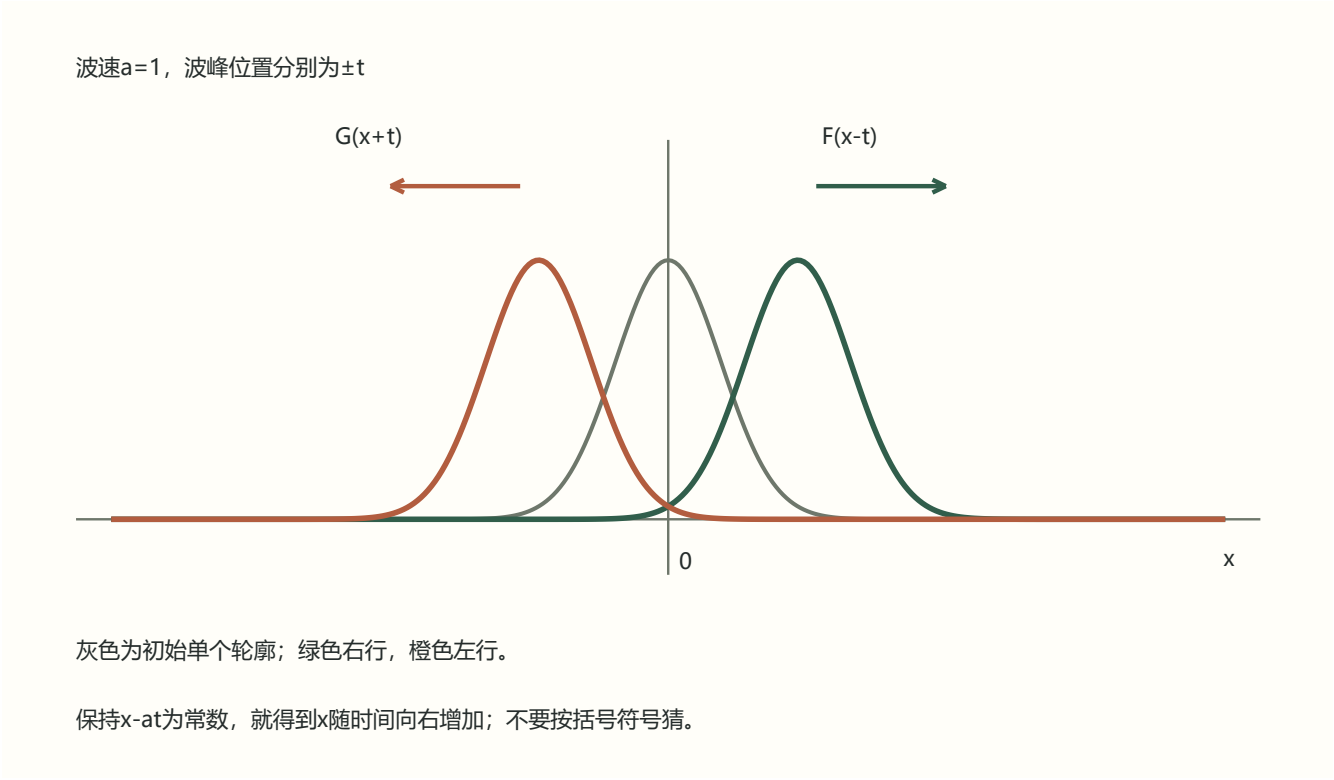
$$\partial_t=a\partial_\xi-a\partial_\eta,\qquad \partial_x=\partial_\xi+\partial_\eta.$$

展开平方，$u_{tt}-a^2u_{xx}=-4a^2U_{\xi\eta}$，所以方程变成$U_{\xi\eta}=0$。由上一段积分，

$$u(t,x)=F(x-at)+G(x+at).$$

$F(x-at)$是向右的行波，因为保持同一特征值$x-at=c$时，$x=c+at$随时间增大；$G(x+at)$向左。**负号对应右行，是解出波峰位置的结果，不是靠箭头记忆。**

图 P1-1 追踪波峰：F(x-at)右行，G(x+at)左行



图示 t=1；当前t=1，右行峰位于x=1，左行峰位于x=-1。这里分别展示两个分量。

数学物理方程篇·第一章 / 1.2

典型方程与弦振动模型

教材209—212页

1.2 · 教材209—212页

07 三个典型方程究竟在描述什么

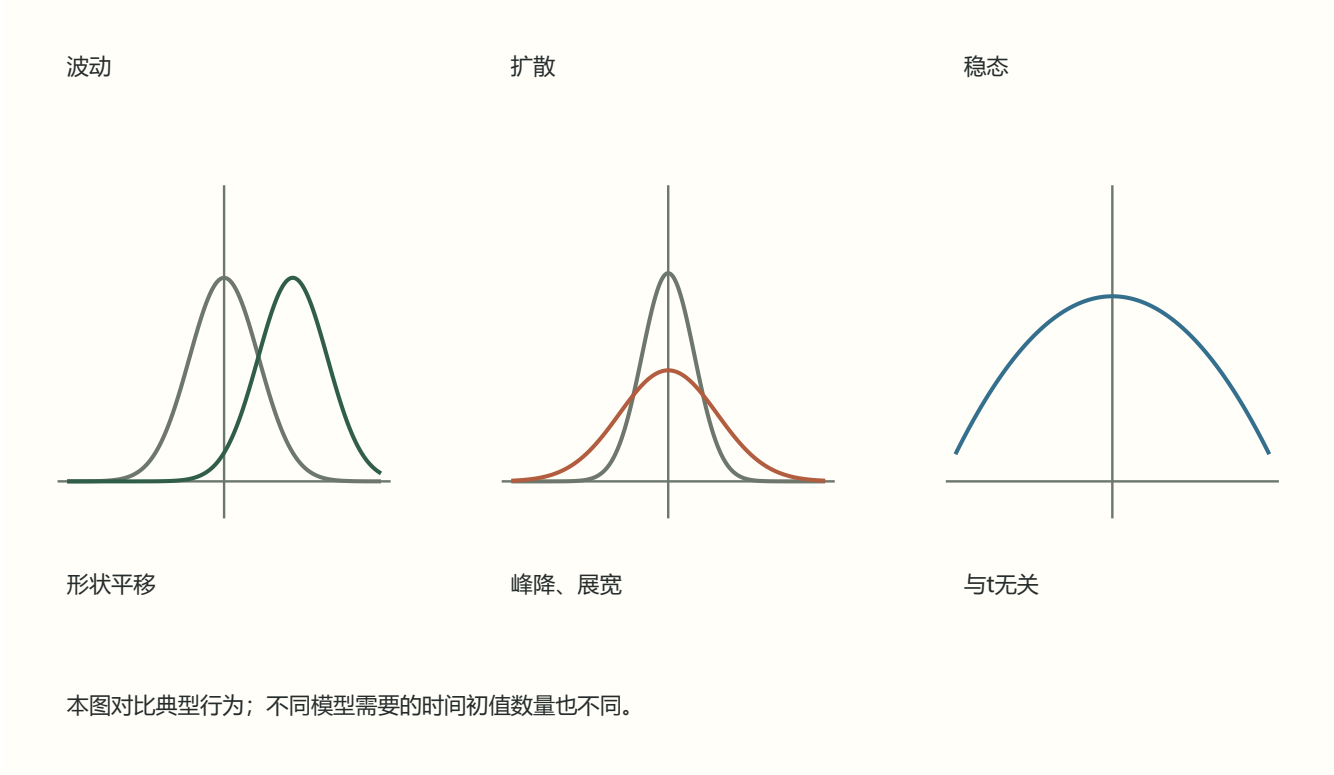
模型	典型方程	主要未知量	演化或稳态
波动	$u_{tt}=a^2\Delta u+f$	位移、某个场分量	二阶时间演化
热传导或扩散	$u_t=\kappa\Delta u+s$	温度、浓度	一阶时间演化
泊松	$\Delta u=g$	电势、稳态温度	不随时间演化

原书热方程也常把系数写成a^2。本讲义用$\kappa>0$表示热扩散率，避免把它和波速a混在一起；遇到教材$a^2=k/(c\rho)$时，直接对应κ。

量纲也不同： 波速a的单位是长度/时间，扩散率κ的单位是长度平方/时间。形式里都有二阶空间导数，不表示物理传播方式相同。

稳定状态令$u_t = 0$；对真正不随时间变化的函数，也有$u_{tt} = 0$。注意仅在某一个时刻$u_t = 0$并不代表过程已稳定，振动到最高点时速度也可暂时为0。

图 P1-2 波动平移、扩散展宽、稳态不随时间改变



灰色示初始轮廓：理想行波只平移，扩散会展宽，稳态问题没有时间演化项。

1.2 · 教材209—212页

08 建模前的假设，哪些会在题目中改变方程

理想弦模型忽略弯曲刚度，只考虑张力沿切线作用。取$u(t,x)$为横向位移，假设纵向位移可忽略，且小斜率$|u_x| \ll 1$，这样弧长约为水平长度，张力的横向分量可线性化。

“小振动”不仅指位移绝对值小，还要斜率小。高频、短波长形状即使振幅不大，也可能斜率很陡。

原书线密度写$\rho(x)$；这里临时写$\rho_\ell(x)$，明确它的单位是质量/长度，和热学的体密度ρ区分。外力密度$g(t,x)$单位是力/长度。

如果题目增加阻力、弹性支撑或变密度，要回到力的平衡式改项；不能只背最简的$u_{tt} = a^2 u_{xx}$。

1.2 · 教材209—212页

09 微元受力：两端张力的差产生曲率项

取区间$[x, x+\Delta x]$。张力水平分量近似为同一个常数T；左右端竖直分量相减，净力约为

$$Tu_x(t, x+\Delta x) - Tu_x(t, x) \approx Tu_{xx}(t, x)\Delta x.$$

加上分布外力$g\Delta x$，牛顿第二定律为

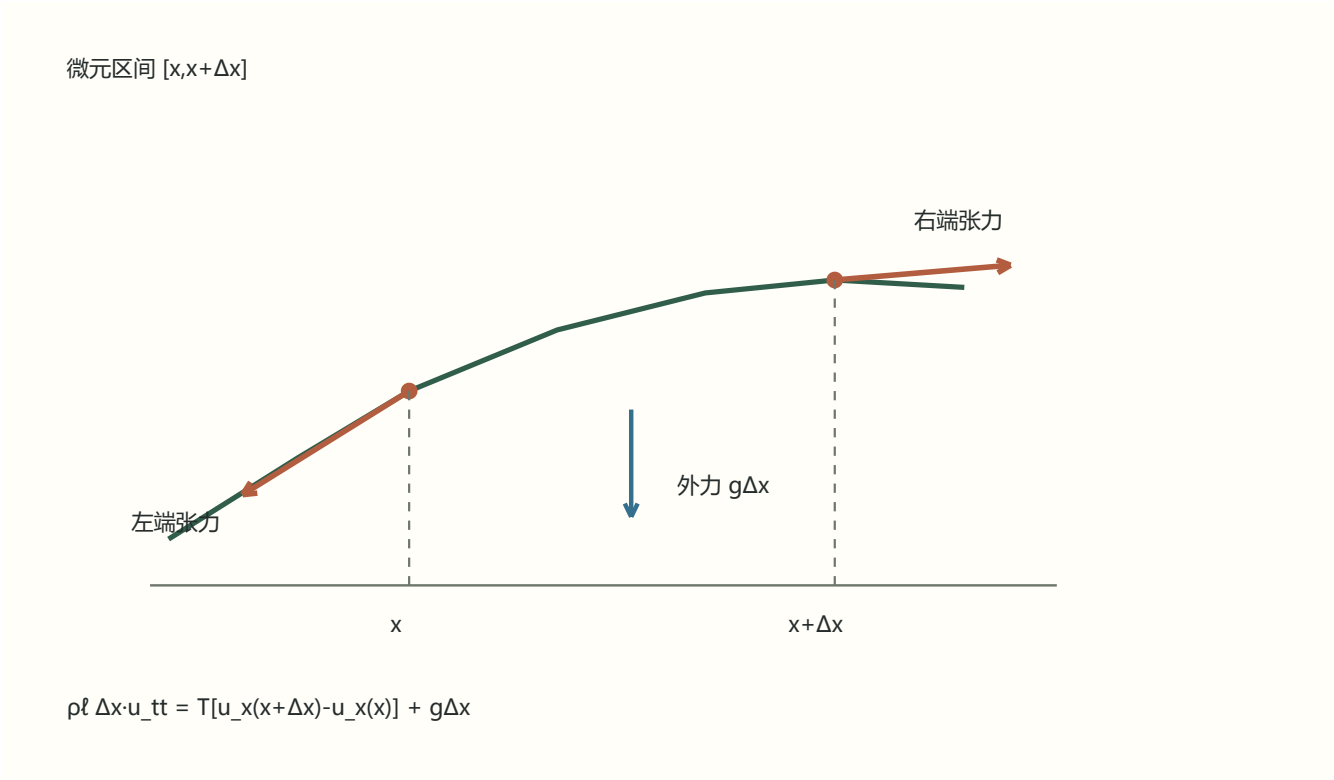
$$\rho_\ell(x)\Delta x\, u_{tt} = Tu_{xx}\Delta x + g\Delta x.$$

约去Δx，得到

$$\rho_\ell(x)u_{tt} = Tu_{xx} + g.$$

原书更细地把张力分成水平、竖直分量，先从水平平衡说明水平分量不依赖x，再用小斜率和近似不伸长把它当常数。第一轮要会“净力差＋外力＝质量×加速度”的主线，不必背每个向量符号。

图 P1-3 弦微元：端点横向张力的差，加外力，等于质量乘加速度



左右张力都沿弦的切线、指向微元外侧；竖直分量相减形成曲率项。外力箭头仅示方向示例。

1.2 · 教材209—212页

10 均匀弦波速与常见附加项

均匀弦ρ_ℓ为常数，

$$u_{tt}=a^2u_{xx}+f,\qquad a=\sqrt{T/\rho_\ell},\quad f=g/\rho_\ell.$$

张力增大，波速增大；线密度增大，波速减小。$g=0$时叫自由振动，$g\neq0$时叫受迫振动；是否有初始形变，是另一件事。

若单位长度阻力为$-\gamma u_t$，则

$$\rho_\ell u_{tt}+\gamma u_t-Tu_{xx}=g.$$

若还受到单位长度回复力$-k_0u$，左边再加k_0u。符号可以从“阻力反向于速度、回复力反向于位移”检查。

若张力$T(x)$为已知变量，净力形式应保留$\partial_x(Tu_x)$，通常不能直接写成$T(x)u_{xx}$。本书最简模型中的常系数来自假设，不是普遍规律。

数学物理方程篇·第一章 / 1.3

热传导扩散与稳态方程

教材212—215页

1.3 · 教材212—215页

11 傅里叶定律：负号把热流指向低温

令u为温度，热流密度向量为

$$\mathbf{q}=-k\nabla u,\qquad k>0.$$

沿单位法向$\mathbf{n}$向外流出的热量密度为$\mathbf{q}\cdot\mathbf{n}=-k\partial_n u$。温度梯度指向升温方向，热流沿相反方向。

例如一维$u_x<0$表示左热右冷，$q_x=-ku_x>0$，热向右流。**负号不是装饰，边界条件的符号也由它决定。**

注意k为导热系数，不是热扩散率；热扩散率还要除以体积热容量$c\rho$。

1.3 · 教材212—215页

12 热平衡：净流入加热源，等于储热增加

取体积微元ΔV。沿x方向的净流入约为$ku_{xx}\Delta V\Delta t$，另两个方向同理。若体积热源密度为$Q(t,\mathbf{x})$，产生热量$Q\Delta V\Delta t$。

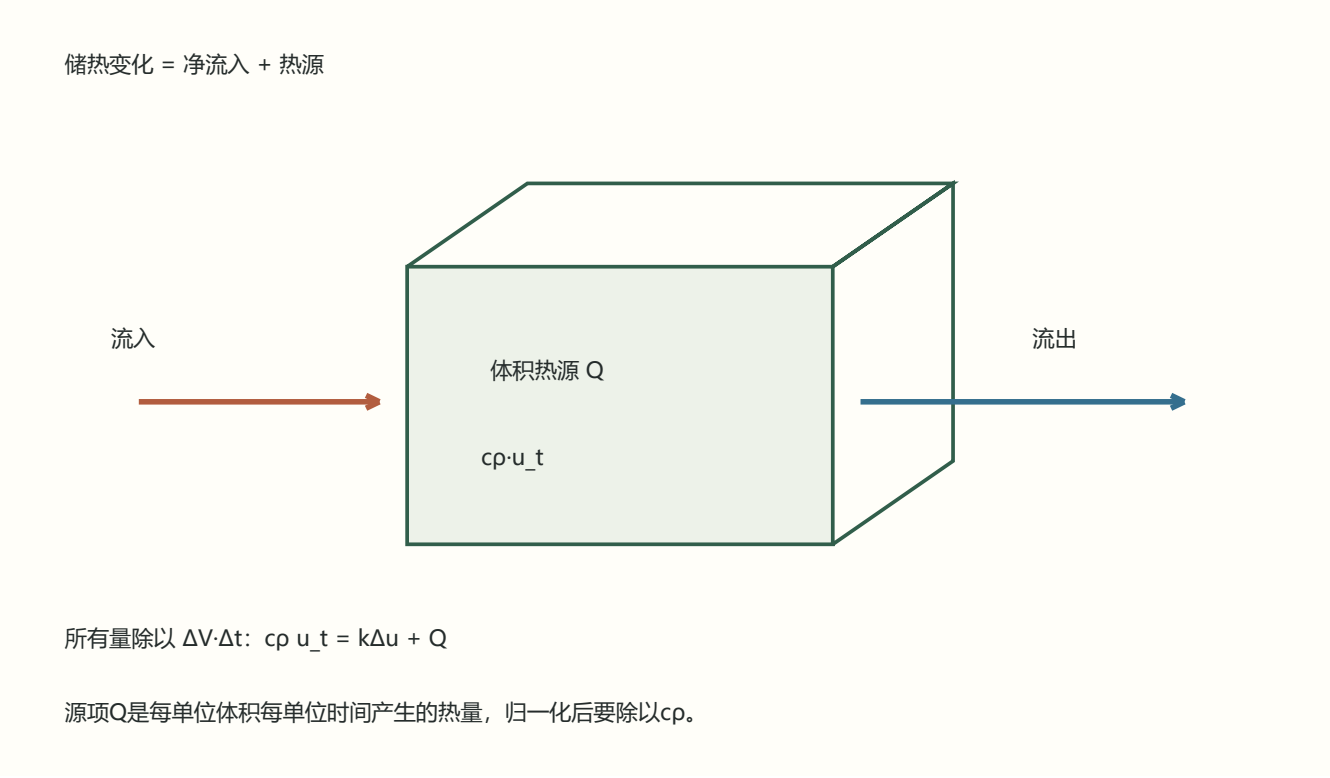
温度变化储存的热量为$c\rho\, u_t\Delta V\Delta t$。守恒给出

$$c\rho\, u_t = k\Delta u + Q, \qquad u_t = \kappa\Delta u + \frac{Q}{c\rho}, \quad \kappa = \frac{k}{c\rho}.$$

常量假设下是这个形式；若k随位置变化，应写$c\rho u_t = \nabla\cdot(k\nabla u) + Q$，不能漏掉系数梯度产生的项。

原书用长方体的六个面逐一相减，是对散度形式的具体展开。讲这段的用途是帮你给源项除对系数，并判断正热源应使温度上升；第一轮会重建守恒等式即可。

图 P1-4 热微元：净流入 + 热源 = 储热增加



图中流入、流出均按各自物理方向标记；守恒中用流入减流出，再加热源。

1.3 · 教材212—215页

13 一维杆不等于热量只能存在于一根数学直线上

均匀细杆沿x放置，若每个横截面内温度近似相同，侧表面绝热，便可令$u=u(t,x)$，得到

$$u_t = \kappa u_{xx} + \frac{Q}{c\rho}.$$

如果截面积A为常数，它在传热量、热源总量与储热量中都出现，最后约掉。若截面积变化，则应保留

$$c\rho A(x)u_t = \partial_x\big(kA(x)u_x\big) + A(x)Q.$$

若侧表面向环境温度θ散热，单位长度散热量为$hP(u-\theta)$，其中P为截面周长，则再加损失项$-hP(u-\theta)$。只有“侧表面绝热”时才能把它省掉。

这段会直接用在建模题。题目说的“均匀、细杆、侧面绝热、无热源”分别对应不同简化，不应把四句话都当背景略过。

1.3 · 教材212—215页

14 扩散方程：把热量换成物质守恒

浓度u的物质通量服从菲克定律$\mathbf{j} = -D\nabla u$。无源时守恒为$u_t + \nabla\cdot\mathbf{j} = 0$，所以

$$u_t = \nabla\cdot(D\nabla u).$$

常数$D>0$时就是$u_t = D\Delta u$。有生成或消耗过程时再加相应源项。

和热传导的共同结构是“通量沿梯度反向＋局部守恒”，因此同一套解法可以用于温度、浓度等不同物理量。第一轮不必另背一套扩散推导。

1.3 · 教材212—215页

15 稳态泊松方程与高斯形状的扩散

热平衡若进入稳态，$u_t = 0$，则

$$\Delta u = -Q/k.$$

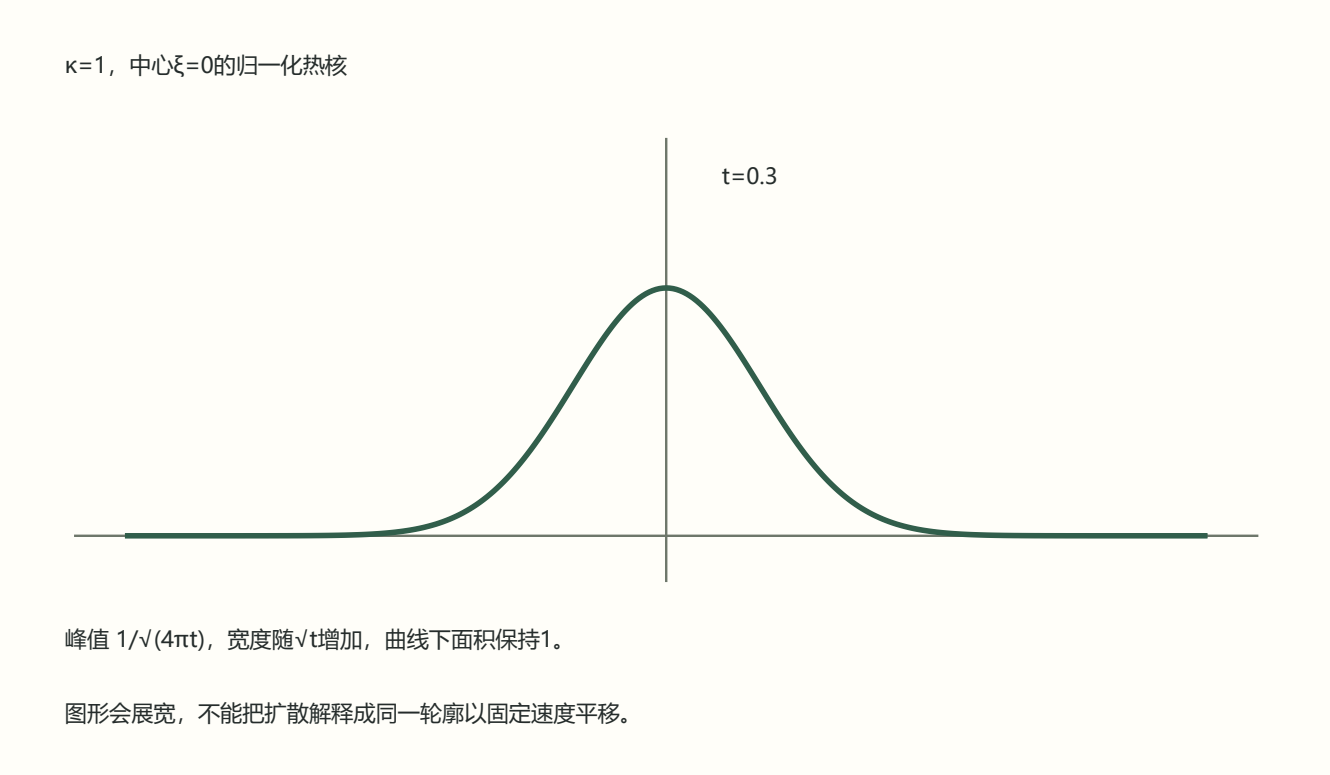
无热源才是$\Delta u = 0$；有源的稳态仍可不是调和函数。泊松右端的负号来自把源项移到另一边。

一维热方程的基本高斯核为

$$G(t,x;\xi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\kappa t}}\exp\!\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4\kappa t}\right), \qquad t>0.$$

随时间增大，峰降低、宽度增大，而全直线积分保持1。这个图帮助区分扩散与不变形行波。原书习题3要求验证一个与它相差常数因子的高斯解；本章先认识、会验证，卷积求一般初值的系统方法以后再学。

图 P1-5 热核的峰降低、宽度增大，总量保持



图示 t=0.3；当前t=0.3，峰值约0.515；灰线为t=0.3的参考轮廓。

数学物理方程篇·第一章 / 1.4

静电势与电磁场的方程

教材215—217页

1.4 · 教材215—217页

16 静电势为什么满足泊松方程

均匀介质中，设电荷体密度为ρ_e，介电常数$\varepsilon>0$。静电方程为

$$\nabla\cdot(\varepsilon\mathbf{E})=\rho_e,\qquad \nabla\times\mathbf{E}=0.$$

局部无旋，或在合适的单连通区域，可以写$\mathbf{E}=-\nabla\varphi$。代入散度式，

$$\Delta\varphi=-\rho_e/\varepsilon.$$

无电荷区才有$\Delta\varphi=0$。如果介电常数随位置变化，应保留$\nabla\cdot(\varepsilon\nabla\varphi)=-\rho_e$。

与前面复势约定区分： 这里φ是实数电势，不需要再讨论取复函数实部或虚部。等价的二维调和函数方法可以接上前面复变部分，但三维通常不能直接用一个复变解析函数表示。

1.4 · 教材215—217页

17 自由电磁场：为什么既能出现波动，也能出现扩散近似

常介质参数下，麦克斯韦方程组给出

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu \mathbf{H}_t, \qquad \nabla \times \mathbf{H} = \sigma \mathbf{E} + \varepsilon \mathbf{E}_t, \qquad \nabla \cdot \mathbf{E} = 0.$$

对第一式再取旋度，用$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \Delta \mathbf{E}$，得到

$$\mu\varepsilon \mathbf{E}_{tt} + \mu\sigma \mathbf{E}_t - \Delta \mathbf{E} = 0.$$

每个分量都满足相应标量方程，磁场也有同样结构。若导电项可忽略，得到波动方程，波速$a = 1/\sqrt{\mu\varepsilon}$。

若在所研究时间尺度上位移电流相对传导电流很小，则可忽略$\varepsilon \mathbf{E}_{tt}$对应的高阶时间项，得到扩散型近似$\mathbf{E}_t = (\mu\sigma)^{-1}\Delta \mathbf{E}$。对典型角频率$\omega$，比较条件是$\varepsilon\omega \ll \sigma$；只把不同量纲的$\sigma$与$\varepsilon$直接比大小不够。

这段的用途是说明同一种数学模型会跨物理领域出现。第一轮会认最终方程、参数与近似条件即可；若不考电磁建模，完整向量恒等式的推导可第二轮细读。

数学物理方程篇·第一章 / 1.5

初始边界条件与定解问题

教材217—222页

1.5 · 教材217—222页

18 泛定方程加条件，才是一个具体问题

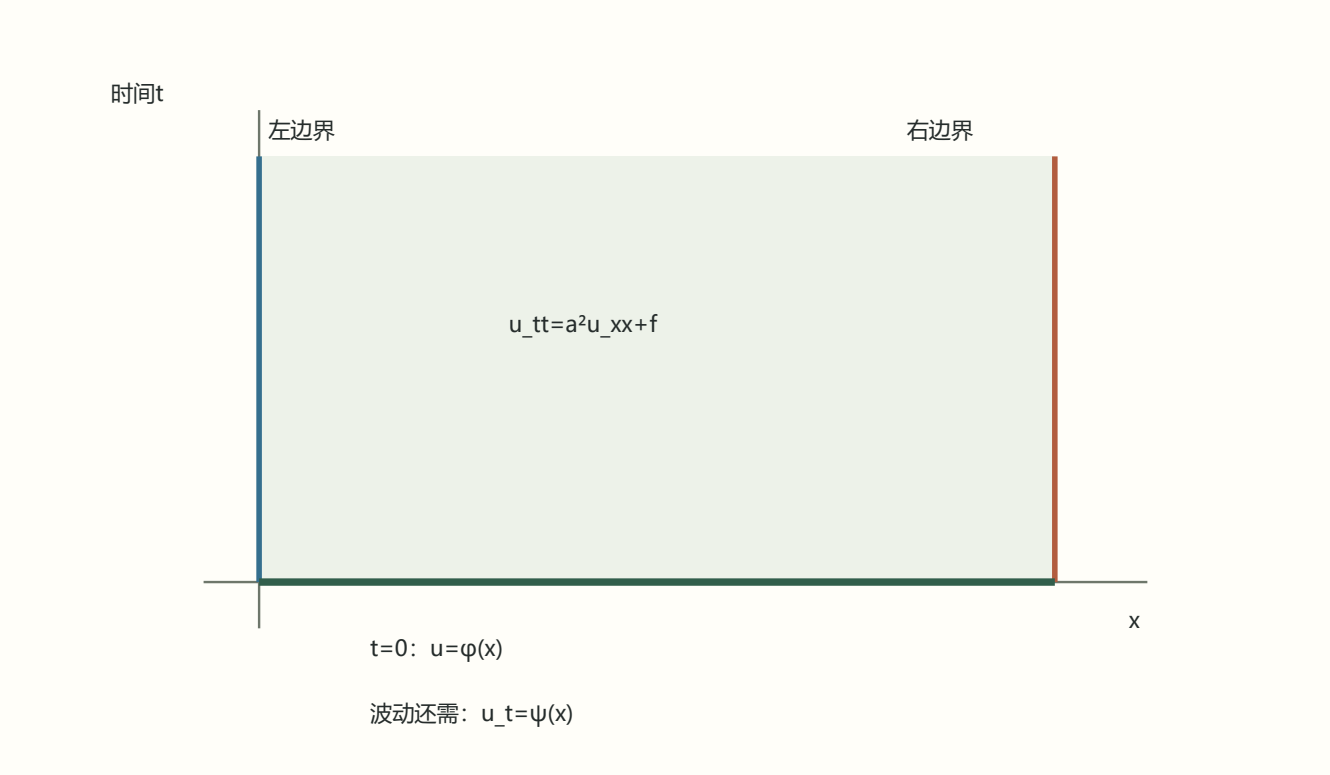
偏微分方程刻画一般规律，本书也叫泛定方程。许多函数能满足同一方程；再给出初始、边界等条件，才构成定解问题。

无界全空间的初值问题通常没有有限位置的边界；有限区间还要约束端点。空间区域必须写清，不能只写一个PDE和几个零。

对波动方程$u_{tt} = a^2\Delta u + f$，需要位移$u(0,\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x})$和速度$u_t(0,\mathbf{x}) = \psi(\mathbf{x})$两条初值；对热方程$u_t = \kappa\Delta u + s$，通常只给温度$u(0,\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x})$。

热方程的初始时间导数不是可随便再加的独立数据： 若要求足够光滑，方程已决定$u_t(0,\mathbf{x}) = \kappa\Delta\varphi + s(0,\mathbf{x})$。

图 P1-6 初值在底边给，边界在两侧给



图示 波动：两条初始数据；底边给位移与速度；左右边另约束有限区域端点，这些数据共同确定问题。

1.5 · 教材217—222页

19 三类边界条件，按“给的是哪种量”判断

用外单位法向$\mathbf{n}$,

$$\alpha\,\partial_n u+\beta u=g$$

统一描述线性边界条件。

类型	典型形式	热学含义
第一类 Dirichlet	$u=\mu$	给定边界温度
第二类 Neumann	$\partial_n u=\nu$	给定通量，经过导热系数换算
第三类 Robin	$k\partial_n u+hu=h\theta$	与环境换热

齐次边界条件指规范写法的右端为0。温度固定为100是第一类非齐次，不因它“不随时间变化”就成为齐次。

空间边界的不同部分可以采用不同类型。“混合问题”在本章主要指同时有初始与边界条件，也可能遇到边界类型混用；阅读题目时直接写清各处条件，不依赖一个词猜含义。

1.5 · 教材217—222页

20 外法向导数：左端负，右端正

区间$0 < x < l$，左端朝外是x负向，右端朝外是x正向，所以

$$\partial_n u(t,0) = -u_x(t,0), \qquad \partial_n u(t,l) = u_x(t,l).$$

给定向外热流密度q_{out}时，

$$-k\partial_n u = q_{\text{out}}.$$

若题目说左右端分别以正热流密度q_1, q_2流入，向外通量分别为$-q_1, -q_2$，故

$$u_x(t,0) = -q_1/k, \qquad u_x(t,l) = q_2/k.$$

同样叫“向内输入正热量”，左右端写出的u_x符号相反。 先画外法向，再写$\mathbf{q}\cdot\mathbf{n}$，比背左右符号可靠。

图 P1-7 相同的向内正热流，在左右端对应相反的ux符号



左端外法向为负x，右端为正x；左右端同为流入正热量，空间导数符号却相反。

1.5 · 教材217—222页

21 牛顿冷却定律怎样变成第三类条件

边界温度u与环境温度θ不同时，向外热流为$q_{\text{out}} = h(u-\theta)$。与傅里叶定律合并：

$$-k\partial_n u = h(u-\theta), \qquad k\partial_n u + hu = h\theta.$$

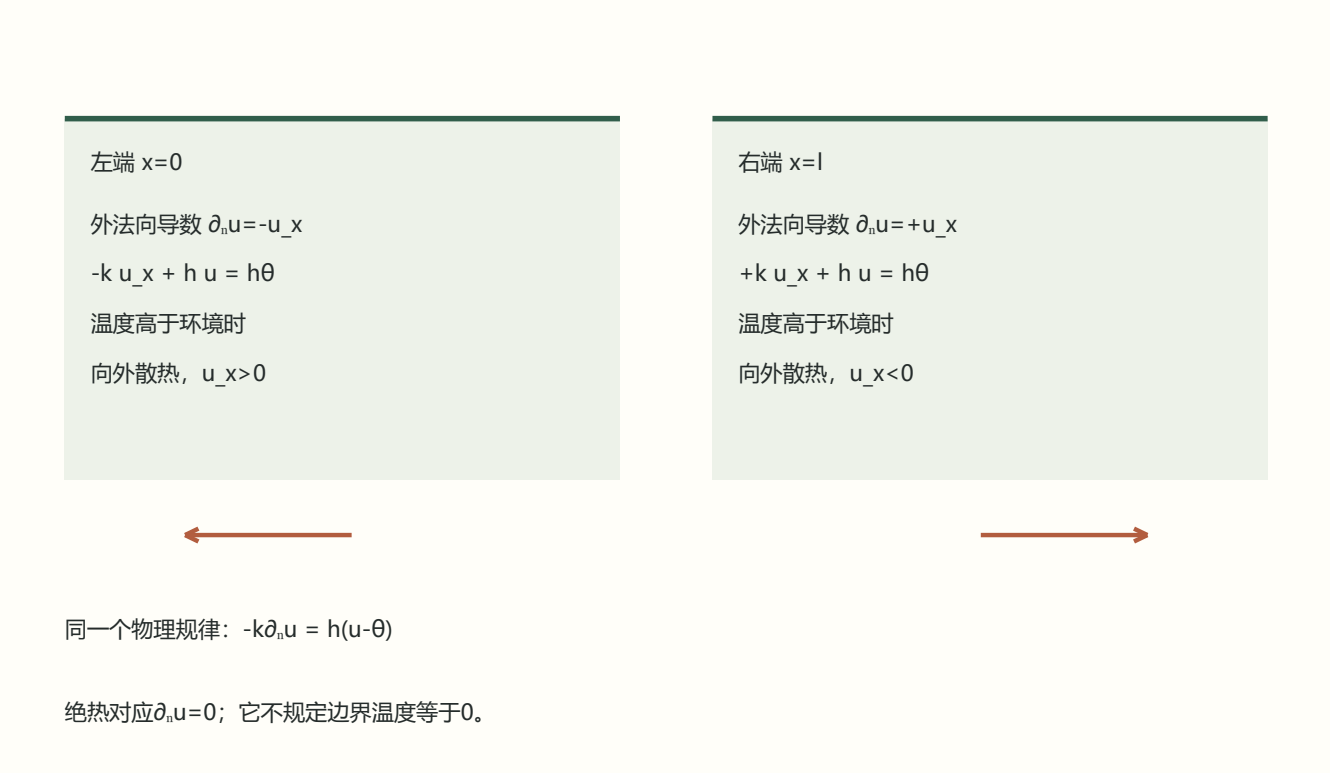
左端为

$$-ku_x(t,0) + hu(t,0) = h\theta(t,0),$$

右端为$ku_x(t,l) + hu(t,l) = h\theta(t,l)$。如果某端绝热，条件是该端$\partial_n u = 0$，而不是$u = 0$；绝热端仍可以很热。

看物理方向检验：若杆端比环境热，$q_{\text{out}} > 0$，必须有$\partial_n u < 0$。正负号不符合时，先查外法向的选取。

图 P1-8 同一个换热规律，左端负ux，右端正ux



外法向形式完全一致；换成坐标导数u_x时才出现左负右正。

1.5 · 教材217—222页

22 原书槽形导体与无限长条的例题

长方体内部无电荷，区域$0 < x < a, 0 < y < b, 0 < z < c$。侧面和底面接地，顶盖电势为$\Phi(x,y)$，则

$$\Delta_3 u = 0, \qquad u(x,y,c) = \Phi(x,y), \quad u(x,y,0) = 0,$$

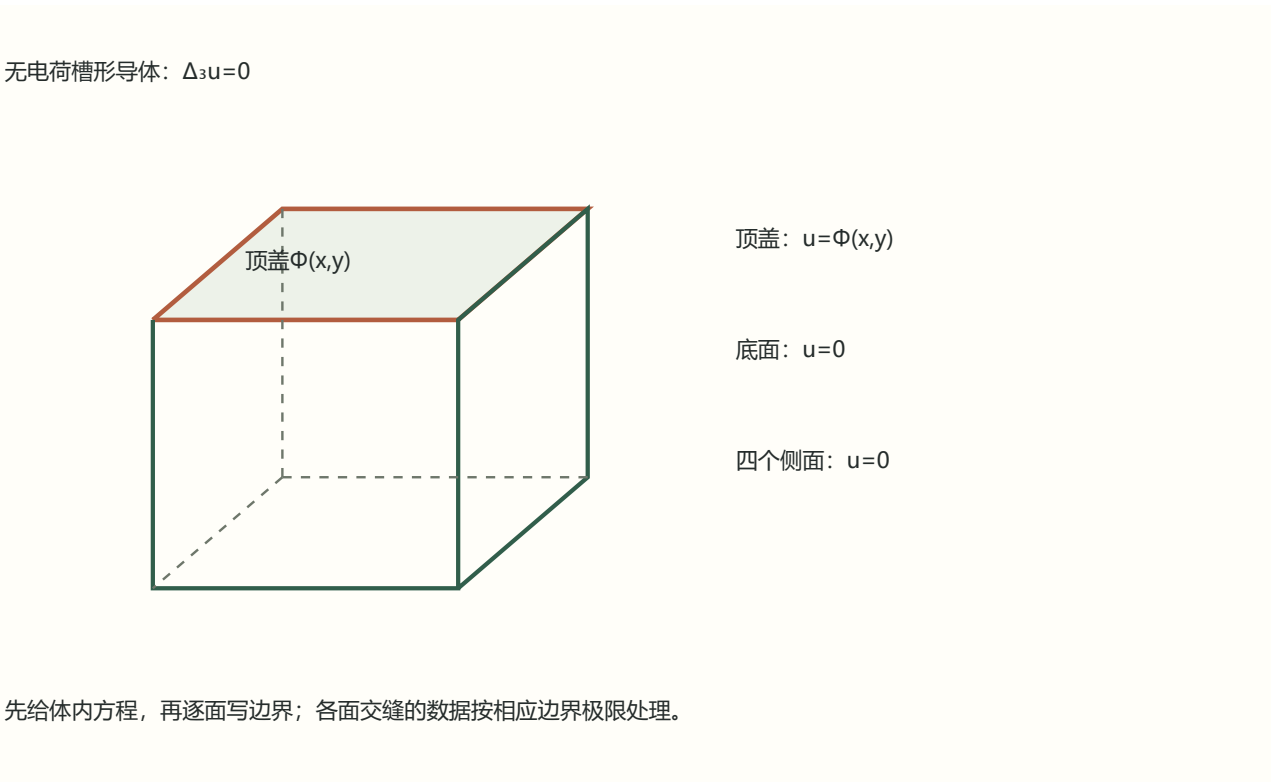
再补四个侧面$x = 0, a$与$y = 0, b$上$u = 0$。顶盖与接地侧面接缝绝缘；若边缘给值不一致，可按各开面边界极限理解，不能强求同一点同时等于两个不同数。

如果导体沿z无限长，几何和边界数据均与z无关，选取有界、物理上相容的平移不变解，就能降为二维矩形域：

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad 0 < x < a,\ 0 < y < b,$$

$y = b$面给u_0，另外三边给0。只说“很长”还不足以在所有位置忽略端部，要结合离端部足够远的近似或无限长理想化。

图 P1-9 槽形导体：顶盖给电势，另外五面接地



五面接地、一面给电势；原题顶盖接缝绝缘，允许开面上的极限数据不在每个棱角连续相容。

1.5 · 教材217—222页

23 原书细杆混合问题：把每一句话用到

长为l、均匀细杆，侧面绝热，内部热源密度$Q(t,x)$，初温$\varphi(x)$；左端与温度$\theta(t)$的介质交换热量，右端绝热。完整问题是

$$\begin{cases} u_t = \kappa u_{xx} + Q/(c\rho), & 0 < x < l,\ t > 0, \\ u(0,x) = \varphi(x), & 0 \le x \le l, \\ -k u_x(t,0) + h u(t,0) = h\theta(t), & t > 0, \\ u_x(t,l) = 0, & t > 0. \end{cases}$$

依次检查：体内有没有源；侧面是否漏热；初温是否给定；左右端各是什么边界；左端法向负号是否保留。

若要求一直光滑到$t=0$的角点，初温还应与边界在初始时刻相容。例如$-k\varphi'(0)+h\varphi(0)=h\theta(0)$、$\varphi'(l)=0$。实际突变加热时可能没有这种高光滑性，仍可在$t>0$讨论较弱意义的解。

数学物理方程篇·第一章 / 1.6

弦端条件与适定性

教材223—225页上部

1.6 · 教材223—225页上部

24 固定自由弹性端：都从端点受力判断

固定端是$u(t,0)=0$或$u(t,l)=0$；按已知规律运动则给$u(t,0)=\mu(t)$，属于第一类条件。

若端点可沿竖直方向在无摩擦导轨滑动，且无外部横向力，端点横向张力应为0，小斜率下得$u_x=0$。这是本书自由端模型，不是“端点可以任意脱离导轨运动”的另一种物理问题。

若左端受向上外力P_0，左端平衡为$Tu_x(t,0)+P_0=0$；右端受向上外力P_l，平衡为$-Tu_x(t,l)+P_l=0$。因此

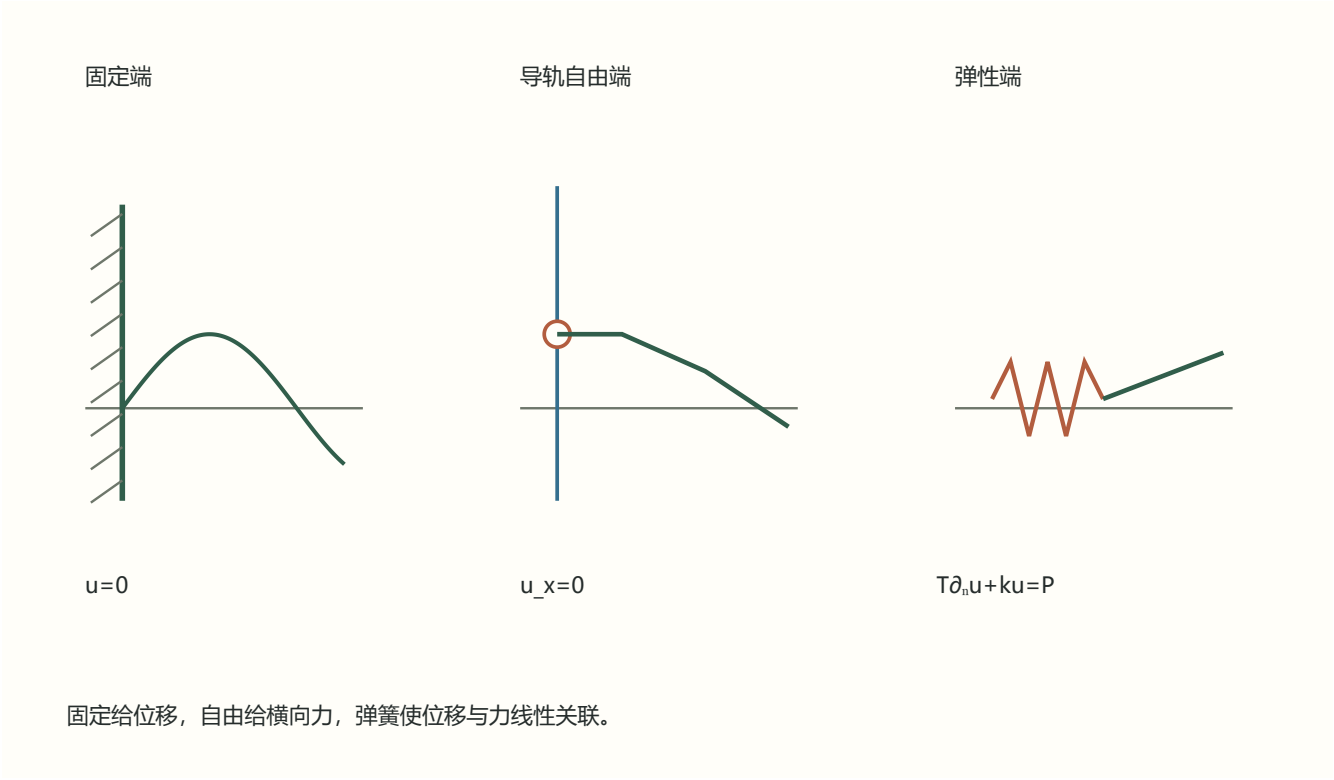
$$Tu_x(t,0) = -P_0, \qquad Tu_x(t,l) = P_l.$$

再加端点弹簧回复力$-ku$，可统一写成

$$T\partial_n u + ku = P_{\text{end}}.$$

左端是$-Tu_x+ku=P_0$，右端是$Tu_x+ku=P_l$。理解了外法向，弹性端与热交换边界在数学上都是Robin结构。

图 P1-10 固定端、导轨自由端与弹性端的区别



导轨自由端可竖直滑动但无横向外力，因而斜率为0；弹性端为Robin形式。

1.6 · 教材223—225页上部

25 适定性：存在唯一稳定，一个都不能少

“存在”指条件能够同时满足；“唯一”指不会有两个不同解满足同一组条件；“稳定”指数据小变化只造成适当意义下的小变化。

给少条件可能不唯一，例如全直线波动方程只给$u(0,x)=0$，仍可以任意选初速度。给矛盾条件可能不存在，例如同时要求某边界点在同一时刻温度0和1。

稳定性不是说解永远不增长，而是说在选定时间范围与范数下依赖数据连续。对达朗贝尔公式，在$0\le t\le T$，

$$\|u-\tilde{u}\|_\infty \le \|\varphi-\tilde{\varphi}\|_\infty + T\|\psi-\tilde{\psi}\|_\infty,$$

其中范数取相关区域，数据应覆盖影响到的初始区间。这一行也直接支持后面的广义解近似。

第一轮掌握程度： 会说明三条各是什么意思、会检查明显缺失和冲突；不要求在这一章证明所有边值问题的适定性。纯Neumann的拉普拉斯问题还可能差一个常数，需要额外归一化；不能仅凭“边界数据写满了”就宣称唯一。

数学物理方程篇·第一章 / 1.7

达朗贝尔公式与广义解

教材225—228页

1.7 · 教材225—228页

26 从两个任意函数，解出给定初值

全直线齐次波动初值问题为$u_{tt}=a^2u_{xx}$、$u(0,x)=\varphi(x)$、$u_t(0,x)=\psi(x)$。先写

$$u=F(x-at)+G(x+at).$$

在$t=0$代入：

$$F+G=\varphi,\qquad -aF'+aG'=\psi.$$

第二式积分后与第一式联立，可解出F,G；两个积分常数在它们相加时抵消。最终

$$u(t,x)=\frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)\,d\xi.$$

这就是达朗贝尔公式。第一项来自初位移，第二项来自初速度；不必每题重做求F,G，但应能从这两条初值方程推回公式。

1.7 · 教材225—228页

27 公式怎么用：先分位移和速度两项

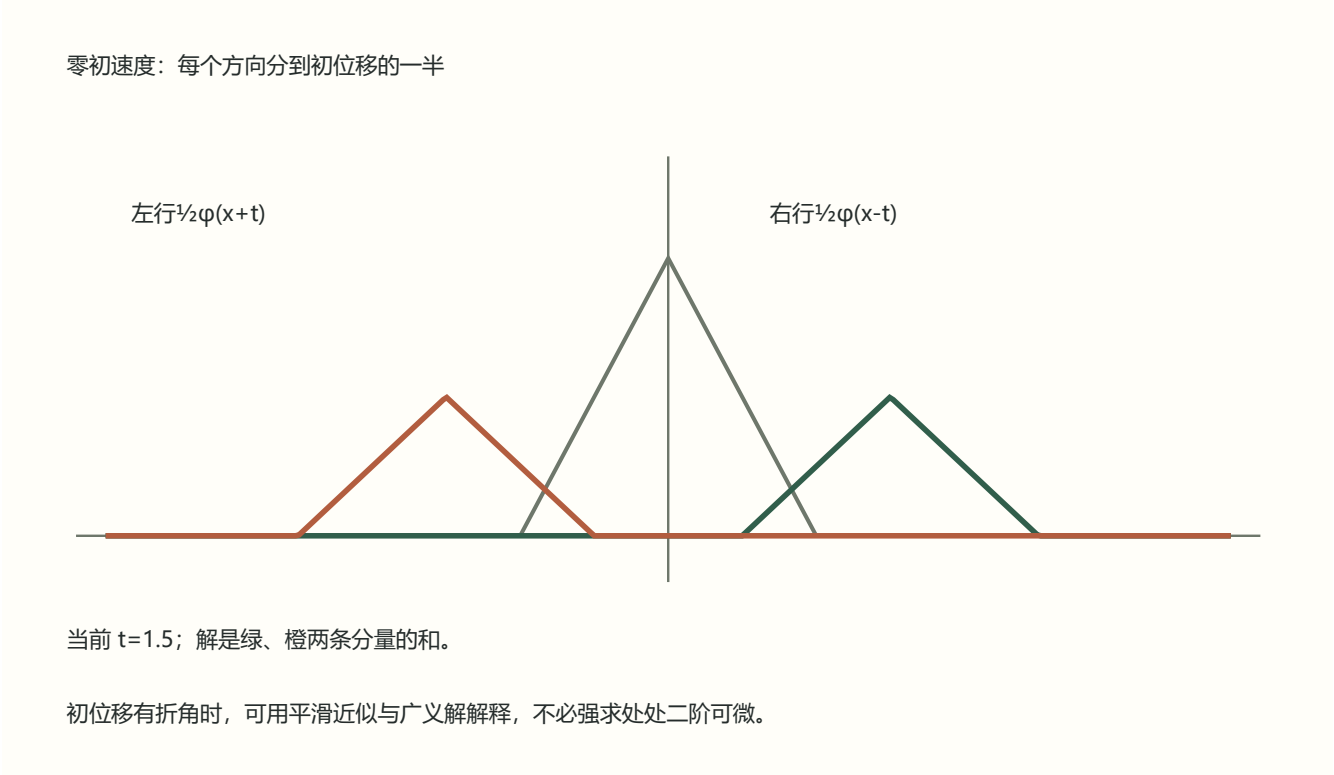
例：$a=2$，$\varphi(x)=x^2,\psi(x)=x$。位移项是

$$\frac{(x-2t)^2+(x+2t)^2}{2}=x^2+4t^2.$$

速度项为$\frac{1}{4}\int_{x-2t}^{x+2t}\xi\,d\xi=xt$，所以$u=x^2+4t^2+xt$。检查$u(0,x)=x^2,u_t(0,x)=x$，且$u_{tt}=8=4u_{xx}$。

若初速度为0，初位移的形状等分为两个幅度为一半、向相反方向传播的波；若初位移为0，不能只说“分成两个原图”，还要按积分计算速度产生的位移。

图 P1-11 初速度为零：初位移分成两份半幅波



图示 t=1.5：两波分开；灰线为原初位移，两条彩色分量各为半幅；重叠时要相加，不能把两条线当成两个解的备选。

1.7 · 教材225—228页

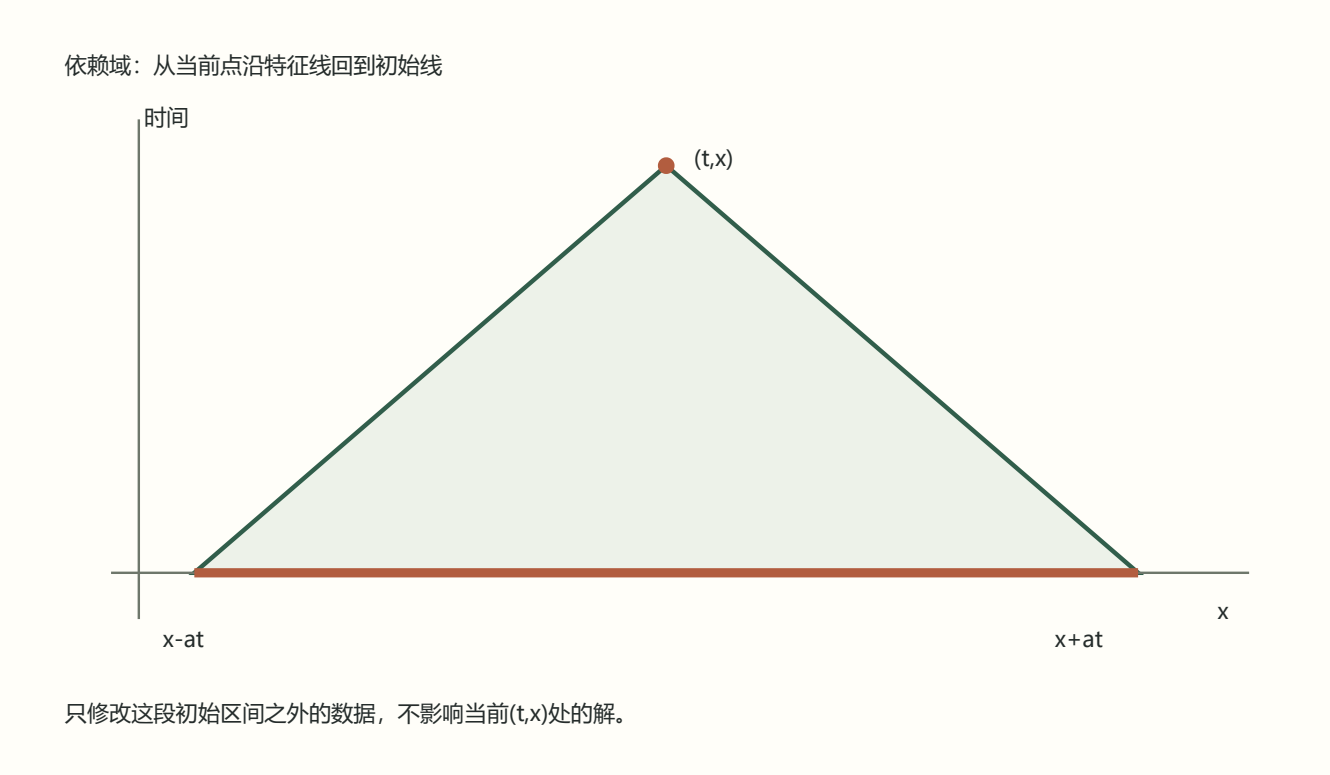
28 依赖区间与有限传播速度

从公式可看出(t,x)处的解只需要初始区间$[x-at,x+at]$上的数据。该区间之外修改初值，在这一时刻还不能影响该点。

这就是有限传播速度a。沿$x-at=$常数、$x+at=$常数的两族直线是特征线，时空图中的三角形就是依赖域。

适用范围必须记： 公式直接针对全直线初值问题。有限弦有端点，波到达端点后发生反射；若不先作正确延拓或处理边界，不能把同一个公式无条件用于所有时间。

图 P1-12 当前点只依赖初始线上有限的一段数据



两条特征线分别为x-at和x+at常数；初始数据只在底部有限区间内起作用。

1.7 · 教材225—228页

29 验证公式：不只要有结果，还要确实满足条件

当$\varphi \in C^2, \psi \in C^1$时，对公式求导。积分端点依赖$t$，因此

$$u_t = \frac{a}{2}[-\varphi'(x-at) + \varphi'(x+at)] + \frac{1}{2}[\psi(x+at) + \psi(x-at)].$$

再求一次时间导数，与$a^2 u_{xx}$比较，恰好相等。$t=0$时积分区间缩为一点，直接得到$u=\varphi$、$u_t=\psi$。

原书把求解分为分析、验证、解释三步：先构造候选函数，再说明可微且满足方程条件，最后解释左右行波。第一轮不必每题写满所有导数，但遇到不光滑数据就必须知道经典验证在哪一步失效。

1.7 · 教材225—228页

30 星号广义解：折角还在，波仍然有意义

三角形初位移在顶点有折角，可能没有连续二阶导数，达朗贝尔表达式却仍能算出连续的传播图。

原书的做法是把连续初值用更光滑的φ_n, ψ_n一致逼近，得到经典解u_n。利用1.6的稳定估计，在有限的相关时空区域，u_n一致趋于同一个由公式给出的u，把这个极限叫本章连续函数类中的广义解。

这不表示极限函数突然有了处处二阶偏导数。它说明可通过平滑近似得到稳定的物理波形；也可进一步用分布或弱积分公式刻画，但本章不要求建立整套理论。

为什么要讲？因为原书拨弦题的三角初位移正好不处处光滑。第一轮需要知道“分段或折角数据仍可用适当广义解释”，不必背逼近定理的完整证明。

数学物理方程篇·第一章 / 1.8

叠加原理特解与齐次化

教材228—234页

1.8 · 教材228—234页

31 有限叠加：方程和条件都要一起叠加

若$Lu_j = f_j$，$Bu_j = g_j$，L, B都为线性算子，则

$$L\left(\sum_j c_j u_j\right) = \sum_j c_j f_j, \qquad B\left(\sum_j c_j u_j\right) = \sum_j c_j g_j.$$

所以齐次问题的解可以任意线性组合；同一个非齐次问题的两个解相加，右端会加倍，通常不再是原问题的解。两个非齐次解之差满足齐次方程和齐次条件。

这条原理不只管PDE，还管初值、边界：固定初位移为φ时，把两个解相加初位移会变成2φ。做题时应写明每个子问题分担哪一份数据。

1.8 · 教材228—234页

32 无穷叠加与积分叠加：为什么不能想加就加

后面的分离变量法会出现$\sum_n c_n u_n$。若要把L移到求和号内，必须保证相应偏导级数具有合适的收敛性；只有函数级数收敛，不自动保证可以逐项求二阶导。

连续参数的叠加同理：若L只作用在变量M上，且交换微分与参数积分合法，

$$L\int u(M,\xi)\,d\xi = \int Lu(M,\xi)\,d\xi.$$

这就是把离散的“很多个小响应相加”变成积分。第一轮要理解交换运算需要条件，实际计算先用教材允许的光滑、收敛情形；不必为每道入门题重证分析定理。

1.8 · 教材228—234页

33 原书泊松例题：先找一个特解

求$\Delta_2 u = x^2 + 3xy + y^2$。右端是二次多项式，二阶求导会降低次数，所以试四次多项式

$$P = Ax^4 + Bx^3y + Cy^4.$$

代入得$\Delta P = 12Ax^2 + 6Bxy + 12Cy^2$，比较系数可取

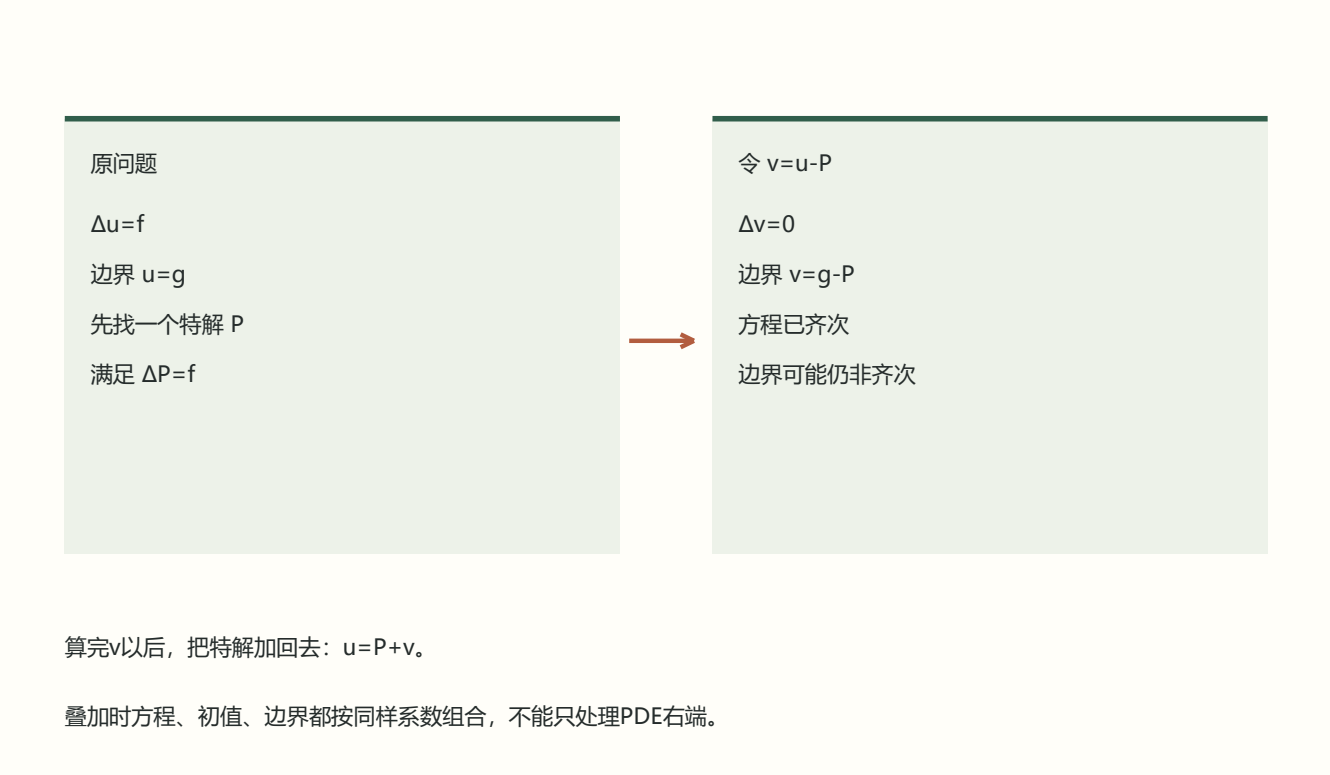
$$P = \frac{x^4 + 6x^3y + y^4}{12}.$$

令$u = P + v$，便有$\Delta v = 0$。因此一般写成“这个特解＋任意调和函数”。在合适的单连通二维区域，实调和函数可写成某个解析函数的实部；局部也可用解析、反解析部分表达。

这里不要把任意复变量C^2函数都当作解析函数，直接断言$F(x+iy) + G(x-iy)$一定调和；F, G需满足相应解析性要求。第一轮用“任意调和v”最清楚。

如果原问题还给了边界$u = g$，新边界是$v = g - P|_{\partial\Omega}$，不一定为0。**把方程齐次化，不等于把全部条件都齐次化。**

图 P1-13 减去特解使方程齐次，边界数据也必须随之改变



减特解是一种数据分担；它改变边界和初值，不能自动使所有条件变成零。

1.8 · 教材228—234页

34 波动方程的齐次化：把连续外力分成每一刻的冲量

考虑零初值问题

$$u_{tt} = Lu + f(t,x), \qquad u(0,x) = u_t(0,x) = 0,$$

其中L只作用在空间变量上。固定一个过去时刻τ，令$w(t,x;\tau)$在$t > \tau$满足

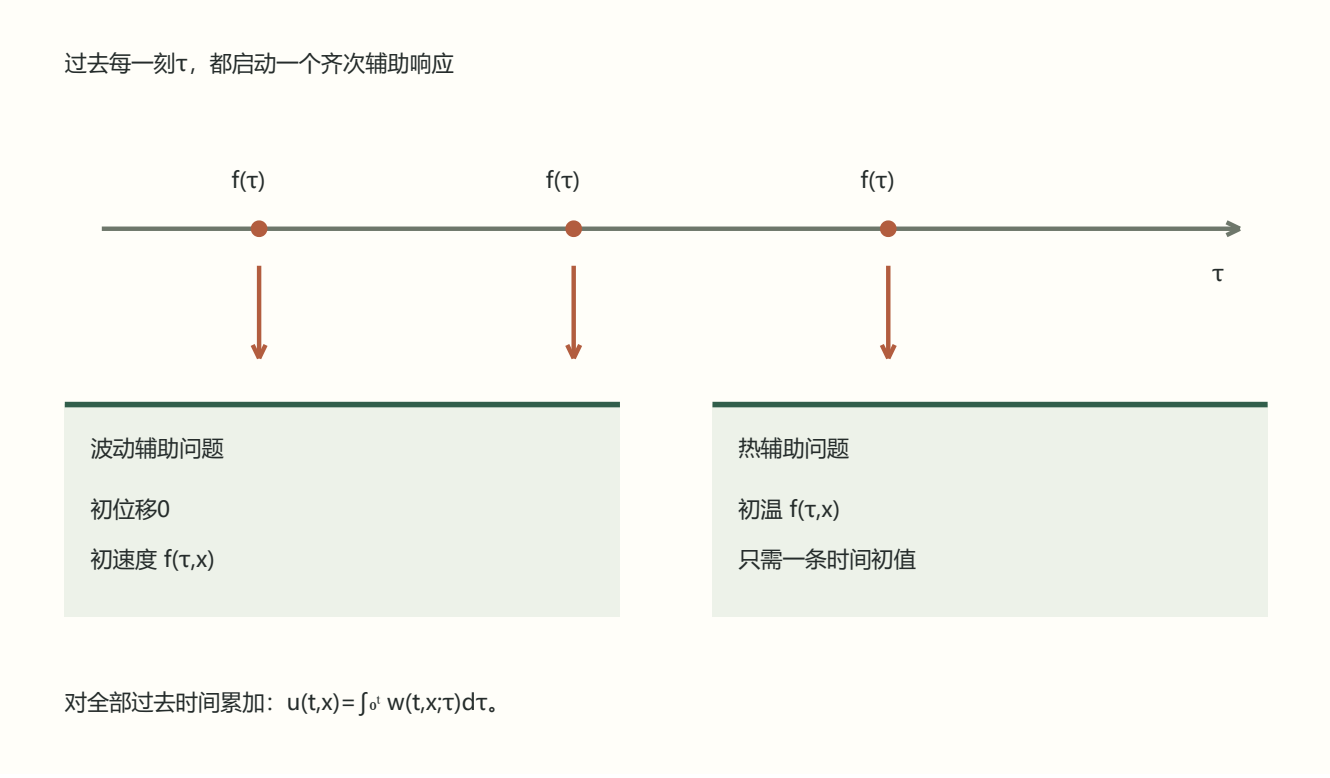
$$w_{tt} = Lw, \qquad w(\tau,x;\tau) = 0, \quad w_t(\tau,x;\tau) = f(\tau,x).$$

每一刻的外力作为一次初速度输入，再把全部过去时刻的响应相加：

$$u(t,x) = \int_0^t w(t,x;\tau)\,d\tau.$$

这叫齐次化原理，也常称杜阿梅尔原理或冲量原理。这里的τ是过去时间参数，t才是当前时间，求t导数时不要混成对τ求导。

图 P1-14 每一刻的源都产生一个辅助响应，再对过去时间累加



波动源放在初速度，热源放在初温；每份辅助响应都从自己的τ时刻开始演化。

1.8 · 教材228—234页

35 证明的关键：上限项为何第一次为零、第二次给源

含变上限积分的求导法则给出

$$u_t=\int_0^t w_t(t,x;\tau)\,d\tau+w(t,x;t).$$

由于每个辅助问题的初位移为0，$w(t,x;t)=0$。再求一次：

$$u_{tt}=\int_0^t w_{tt}\,d\tau+w_t(t,x;t)=Lu+f(t,x).$$

同时$t=0$时两个积分长度为0，初值都为0。这两条端点性质就是证明核心。

若把辅助问题的初速度也设为0，第二次求导就不能产生源项，构造会失败。为什么必须记这个证明？它能避免把波动与热方程的齐次化初值放错位置。

1.8 · 教材228—234页

36 原书受迫弦例题与总公式

对全直线$L=a^2\partial_{xx}$，用达朗贝尔公式解辅助问题：

$$w(t,x;\tau)=\frac{1}{2a}\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\tau,\xi)\,d\xi.$$

所以零初值受迫解为

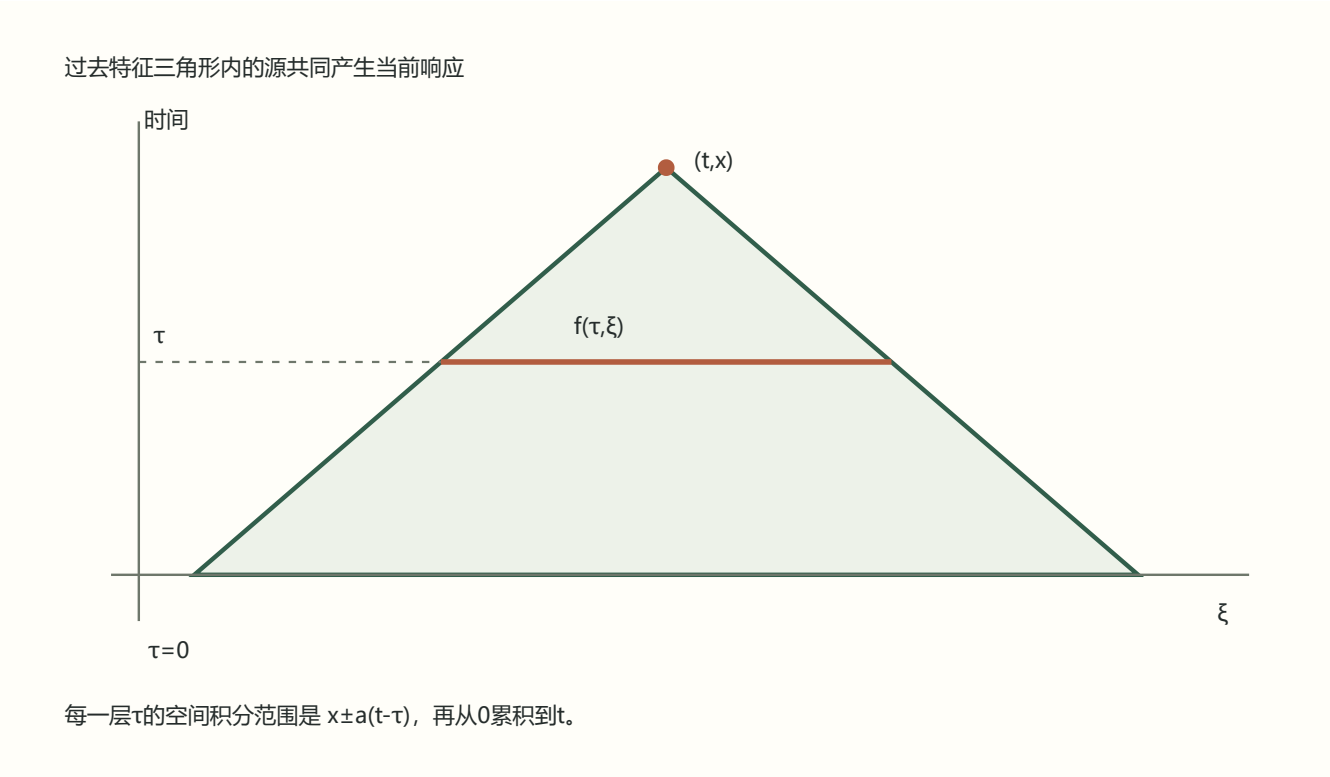
$$u_f(t,x)=\frac{1}{2a}\int_0^t\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\tau,\xi)\,d\xi\,d\tau.$$

若还有初位移φ、初速度ψ，再加齐次初值解：

$$u=\frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)\,d\xi+u_f(t,x).$$

源点也只能从过去的依赖三角形内影响当前点。最简单检验是常数源f_0：内积分长度$2a(t-\tau)$，得到$u_f=f_0t^2/2$，与无空间变化时$u_{tt}=f_0$一致。

图 P1-15 受迫波只累加过去特征三角形内的源



橙线是一个固定过去时刻τ的源积分区间；三角形之外的源来不及影响当前点。

1.8 · 教材228—234页

37 热方程的齐次化：源放在辅助问题的初温

零初温问题$u_t = Lu + f$，固定τ后解

$$w_t = Lw, \qquad w(\tau, x; \tau) = f(\tau, x).$$

再令$u = \int_0^t w\, d\tau$，求一次导数就得到

$$u_t = \int_0^t Lw\, d\tau + w(t, x; t) = Lu + f.$$

对照波动：波动是二阶时间方程，把源放初速度；热方程是一阶，把源放初温。两者的积分结构相似，但辅助初值不同。

本章定理在全空间、空间算子不随时间变化的框架下陈述；在合适有界区域也可配相同齐次边界使用。若边界本身非齐次，还要先分担或消去边界数据，不能只消源就宣布全部问题已齐次。

数学物理方程篇·第一章 / 1.9

原书习题路线与公式速查

教材234—236页

1.9 · 教材234—236页

38 原书1—6题：代入验证与通解

原书题号	主线	关键一步
1(1)	二维径向调和	$\Delta u = u'' + u'/r$
1(2)	三维径向Helmholtz	$\Delta u = u'' + 2u'/r$，令$v = ru$
2	两个不同方向函数叠加	链式法则、算子因式分解
3	高斯解与$t \to 0+$极限	求对数导数，注意只在$x \neq \xi$讨论该点态极限
4	共振型特解	代$u = Axe^{2x+y}$，不要只试指数本身
5	$f(xy)$的不变量	xu_x与yu_y都是$xyf'(xy)$
6	偏积分、常微分视角、减特解	其他变量作为参数，保留任意函数

1(1)得到$u = A\ln r + B$，适用$r > 0$；若要求在原点有界，则$A = 0$。1(2)令$v = ru$后有$v'' + k^2 v = 0$，故

$$u(r) = \frac{A\sin kr + B\cos kr}{r}, \qquad r > 0.$$

若要求原点正则，通常需$B = 0$，并用$\sin kr/r \to k$延拓。

原书2的方程可写为$(\partial_y - \lambda_1\partial_x)(\partial_y - \lambda_2\partial_x)u = 0$，分别验证每一项即可。原书4代入得到$4Ae^{2x+y} = e^{2x+y}$，所以$A = 1/4$。

原书6(1)把x, z视为参数，得$u = F(x,z)\exp[-\int a(x,y,z)\,dy]$；6(2)$u_{xy} + u_y = 0$，令$v = u_y$，得$v_x + v = 0$，所以$u = e^{-x}F(y,z) + G(x,z)$。

6(3)$u_{tt} = a^2 u_{xx} + 3x^2$，可取时间无关特解$P = -x^4/(4a^2)$，再加左右行波。这里$a > 0$，分母不能取0。

1.9 · 教材234—236页

39 原书7—8题：把物理条件写全

原书7三种热杆情况都从$u_t = \kappa u_{xx}$、$u(0,x) = \varphi(x)$开始，再补端点：

1. 左绝热右恒温：$u_x(t,0)=0,\ u(t,l)=u_0$。
2. 两端分别以q_1,q_2流入：$u_x(t,0)=-q_1/k,\ u_x(t,l)=q_2/k$。
3. 左给温$\mu(t)$、右与环境$\theta(t)$换热：$u(t,0)=\mu(t)$，$ku_x(t,l)+hu(t,l)=h\theta(t)$。

原书8是长度l的两端固定弦，中点被拉起高度H后从静止释放。初位移是

$$\varphi(x)=\begin{cases}2Hx/l, & 0\le x\le l/2,\\ 2H(l-x)/l, & l/2\le x\le l.\end{cases}$$

再写$u_t(0,x)=0$、$u(t,0)=u(t,l)=0$、$u_{tt}=a^2u_{xx}$。本题只要求建模，不必提前求全时刻振型级数。折角意味着需要分段或广义解解释，模型本身仍有用。

1.9 · 教材234—236页

40 原书9—12题：降维边值特解特征线与延拓

9(1)$u_t=x^2,u(0,x)=x^2$，直接积分得$u=(t+1)x^2$。

9(2)球对称波动令$v=ru$，变成$v_{tt}=a^2v_{rr}$；为了在$r=0$正则，$v(t,0)=0$。把$r\varphi(r)$、$r\psi(r)$作奇延拓到负轴，再用一维达朗贝尔公式，最后除r，$r=0$取适当极限。球面面积造成的$1/r$衰减，正是这个换元的意义。

9(3)单位球面上给$(5+4y)^{-1/2}$。注意点$(0,-2,0)$在球外，函数

$$u(x,y,z)=\frac{1}{\sqrt{x^2+(y+2)^2+z^2}}$$

在球内调和；球面上$x^2+y^2+z^2=1$，分母平方就是$5+4y$。找到合适球外点源，便得满足条件的解；唯一性可用调和函数的Dirichlet唯一性结论确认。

星号9(4)是沿$t+x=0$给$\varphi(x)$、$t-x=0$给$\psi(x)$的Goursat问题。本题$a=1$，把
$u=F(x-t)+G(x+t)$代入两条线，得到

$$u(t,x)=\varphi\big((x-t)/2\big)+\psi\big((x+t)/2\big)-\varphi(0),\qquad \varphi(0)=\psi(0).$$

每条特征线只留下一个变化的函数项，交点值被算了两次，故要减去一次。它和在$t=0$同时给位移、速度的Cauchy问题不同。

原书10是输运方程$u_t+au_x=f$。沿$x=x_0+at$求全导数，积分得

$$u(t,x)=\varphi(x-at)+\int_0^t f\big(\tau,x-a(t-\tau)\big)\,d\tau.$$

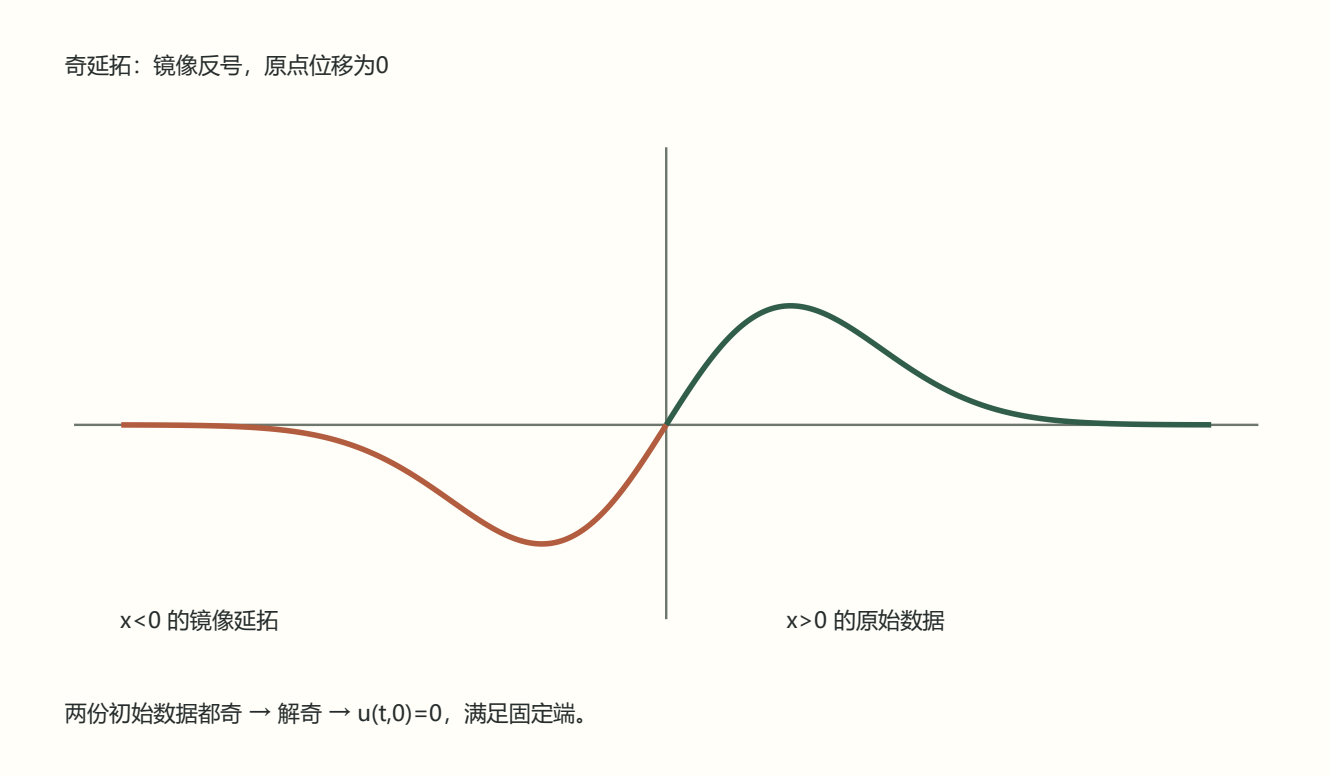
星号11利用初值奇偶性：两份初值都奇，则解关于x仍奇，$u(t,0)=0$；都偶则解偶，光滑时$u_x(t,0)=0$。

星号12固定半直线$x>0$、初位移$\sin x$、初速度kx。两者本来都可奇延拓，公式直接给

$$u(t,x)=\sin x\cos(at)+kxt.$$

检验$x=0$边界、两条初值和波动方程。这里初速度在无穷远增长，并不妨碍每个有限依赖区间上的公式有意义；也不要把它误当有限弦两端固定题。

图 P1-16 奇延拓对应固定端，偶延拓对应零斜率端



图示 奇延拓：固定端u=0；奇延拓适配固定端；若要求初始角点连续，初位移在原点也应为0。

1.9 · 教材234—236页

41 一张表决定先写什么、再算什么

题目信号	第一动作	必查事项
判断方程	找最高偏导、看未知量是否线性	时间阶数另看
微元建模	受力或守恒	密度、热容量和源项单位
定解问题	PDE + 区域 + 全部条件	初值数量与端点法向
给定热流	先写$\mathbf{q}=-k\nabla u$	“流入”还是“流出”
固定或绝热	位移/温度值，或法向导数	绝热不等于零温

题目信号	第一动作	必查事项
全直线自由波	达朗贝尔公式	两项初值分开
非齐次源	减特解或杜阿梅尔积分	条件也随拆分改变
无穷叠加	先检查是否可交换求导	收敛与正则性

这一章的建模题写完后，逐句划掉题目中的已知条件，确保每一句都在模型里有位置。解题完成后，至少验PDE、初值、边界三项。若数据有折角或突变，再说明采用分段或广义解的解释。

数学物理方程篇·第一章 / 1.10

二十四道自编检查题与完整解析

全章复习

1.10 · 全章复习 · 自编检查题

练习1 判阶数与线性

判断$u_t = xu_{xx} + u + 1$和$u_t + uu_x = 0$的阶数、线性；第一式是否齐次?

展开解析：系数依赖x不影响线性

第一式二阶线性，整理成$u_t - xu_{xx} - u = 1$，非齐次。第二式一阶非线性，因为u乘着u_x。不能因第二式右端为0就套线性齐次叠加原理。

1.10 · 全章复习 · 自编检查题

练习2 积分后保留什么自由度

求$u_{xy} = 0$的通解，并求$u_y = 2x$的通解。

展开解析：任意函数不只常数

第一式为$u = F(x) + G(y)$。第二式为$u = 2xy + C(x)$。对y积分时，积分“常数”可任意依赖x。

1.10 · 全章复习 · 自编检查题

练习3 验证一个调和函数

验证$u = e^{2y}\cos 2x$满足二维拉普拉斯方程，说明它是否也满足$u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=0$。

展开解析：逐项求导

$u_{xx} = -4u, u_{yy} = 4u$，相加为0。把它看作与$z$无关的三维函数，有$u_{zz}=0$，也满足三维拉普拉斯方程。

1.10 · 全章复习 · 自编检查题

练习4 行波的方向

$u(t,x) = \exp[-(x-3t)^2]$沿哪个方向运动？波速是多少？满足什么波动方程？

展开解析：追踪波峰

波峰$x-3t=0$，即$x=3t$，向右，速度3。因$u=F(x-3t)$，有$u_{tt}=9u_{xx}$。

1.10 · 全章复习 · 自编检查题

练习5 张力与线密度

弦张力变为原来的4倍，线密度变为原来的2倍，波速变为多少倍？

展开解析：先写根号比

$a=\sqrt{T/\rho_\ell}$，所以新旧比为$\sqrt{4/2}=\sqrt{2}$。不能直接按$4/2=2$算。

1.10 · 全章复习 · 自编检查题

练习6 阻力项写在哪一侧

单位长度阻力为$-\gamma u_t$，外力密度为g。写出弦振动方程并说明每项单位。

展开解析：从净力等于质量乘加速度

$\rho_\ell u_{tt} = Tu_{xx} - \gamma u_t + g$，等价于$\rho_\ell u_{tt} + \gamma u_t - Tu_{xx} = g$。每项都是单位长度上的力；除以$\rho_\ell$后每项为加速

度。正阻力系数在左边是正的一阶时间导数项。

1.10 · 全章复习 · 自编检查题

练习7 热源应除以什么

均匀材料的热源密度为Q，比热c、体密度ρ、导热系数k。写热方程和有源稳态方程。

展开解析：储热系数与传热系数分开

$c\rho u_t = k\Delta u + Q$，所以$u_t = k\Delta u/(c\rho) + Q/(c\rho)$。稳态为$\Delta u = -Q/k$，不是$-Q/(c\rho)$。

1.10 · 全章复习 · 自编检查题

练习8 热流方向

一维温度$u = 10 - 2x$，$k = 3$。求热流向量在x方向的分量，判断方向。

展开解析：梯度负，热流正

$q_x = -ku_x = -3(-2) = 6$，沿x正方向流。它从左侧高温流向右侧低温。这里q_x是通量分量，不是温度的时间导数。

1.10 · 全章复习 · 自编检查题

练习9 两端向内输入热量

杆$0 < x < l$，两端分别以正通量q_1, q_2向杆内输入热量。写u_x条件，并判断总热量增加还是减少。

展开解析：先写向外法向

左端$u_x = -q_1/k$，右端$u_x = q_2/k$。若侧面绝热且无体源，总储热变化为
$kA[u_x(l) - u_x(0)] = A(q_1 + q_2) > 0$，符合两端都流入。

1.10 · 全章复习 · 自编检查题

练习10 左端热交换

杆左端与温度$\theta(t)$的环境换热，右端绝热。写两个边界条件；若左端比环境热，左端u_x应是什么符号?

展开解析：Robin与Neumann

左端$-ku_x(t,0)+hu(t,0)=h\theta(t)$，右端$u_x(t,l)=0$。若左端$u>\theta$，由$ku_x=h(u-\theta)$得$u_x(t,0)>0$；温度沿进入杆内的正向升高，热从左端向外流。

1.10 · 全章复习 · 自编检查题

练习11 初始条件数量

解释为什么热方程通常给一个初值，波动方程给两个。若热方程已有初温φ，再给初始u_t能否任意选?

展开解析：看时间阶数

热方程对t一阶，波动方程对t二阶。热方程的高光滑解满足$u_t(0,x)=\kappa\varphi''(x)+s(0,x)$，所以不能再任意指定独立初始导数；它必须与PDE相容。

1.10 · 全章复习 · 自编检查题

练习12 完整写出热杆问题

侧表面绝热、无内源的均匀杆，初温$\varphi(x)$，左端保持0，右端保持U_0，写定解问题。

展开解析：方程区域与条件缺一不可

$u_t=\kappa u_{xx}$，$0<x<l,t>0$；$u(0,x)=\varphi(x)$；$u(t,0)=0,u(t,l)=U_0$。若要求初始角点处连续，还应$\varphi(0)=0,\varphi(l)=U_0$。边界非齐次，因为右端$U_0$一般不为0。

1.10 · 全章复习 · 自编检查题

练习13 拨弦初位移

长度l的弦两端固定，在$x=l/3$处拉高H后从静止放开。写初位移与全部定解条件。

展开解析：两段直线连接端点

初位移为$3Hx/l$在$0 \le x \le l/3$；$3H(l-x)/(2l)$在$l/3 \le x \le l$。方程$u_{tt}=a^2u_{xx}$，初速度0，边界$u(t,0)=u(t,l)=0$。两段在$l/3$均等于H，折角按分段或广义解理解。

1.10 · 全章复习 · 自编检查题

练习14 达朗贝尔公式的多项式计算

解全直线$u_{tt}=4u_{xx}$，$u(0,x)=x^2, u_t(0,x)=1$。

展开解析：分开计算两项

位移项为x^2+4t^2，速度积分项为$\frac{1}{4}\int_{x-2t}^{x+2t}1\,d\xi=t$。故$u=x^2+4t^2+t$。$u_{tt}=8=4u_{xx}$，初值正确。

1.10 · 全章复习 · 自编检查题

练习15 正弦位移与线性初速度

全直线波速$a>0$，$\varphi(x)=\sin x, \psi(x)=kx$。求解，并说明能否也满足半直线固定端$x=0$。

展开解析：先用三角和差

位移项为$\sin x\cos(at)$；速度项为kxt。所以$u=\sin x\cos(at)+kxt$，在$x=0$为0，故限制到$x>0$也满足固定端。它不自动满足任意有限位置l的另一固定端。

1.10 · 全章复习 · 自编检查题

练习16 依赖区间

波速$a=2$，求$t=3,x=1$处依赖的初始数据区间。若只在$x=10$附近改动初值，能否影响此点?

展开解析：用两条特征线回到初始线

区间为$[1-2\cdot3,1+2\cdot3]=[-5,7]$。若改动支集完全在这个区间之外，例如$10$附近很小的邻域，则不能影响该时空点；以后更长时间可能影响。

1.10 · 全章复习 · 自编检查题

练习17 叠加是否仍是原问题的解

若$Lu_1 = Lu_2 = f \neq 0$，且两者满足同一非齐次边界$Bu_1 = Bu_2 = g$，求$L(u_1 - u_2)$、$B(u_1 - u_2)$；$u_1 + u_2$一般满足什么？

展开解析：右端也线性组合

差满足齐次方程和齐次边界：$L(u_1 - u_2) = 0, B(u_1 - u_2) = 0$。和满足$L(u_1 + u_2) = 2f, B(u_1 + u_2) = 2g$，一般不再是原来的非齐次问题。

1.10 · 全章复习 · 自编检查题

练习18 找特解并改变边界

求$\Delta_2 u = x^2 + y^2$的一个多项式特解。若原边界$u = 0$，减去该特解后边界是否仍为0？

展开解析：方程与边界分别处理

可取$P = (x^4 + y^4)/12$，因为$\Delta P = x^2 + y^2$。令$v = u - P$，有$\Delta v = 0$，但边界$v = -P|_{\partial\Omega}$，通常非零。除非特解本身在边界为0，否则不能自动把所有数据齐次化。

1.10 · 全章复习 · 自编检查题

练习19 杜阿梅尔积分检验

全直线零初值问题$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f_0$，$f_0$常数，求解。

展开解析：积分区间长度就是关键

内积分为$2a(t-\tau)f_0$，所以$u = f_0 \int_0^t (t-\tau)\, d\tau = f_0 t^2/2$。它与$x$无关，故$u_{xx} = 0, u_{tt} = f_0$，两条初值为0。

1.10 · 全章复习 · 自编检查题

练习20 波动与热的辅助初值

同样有源项$f(\tau, x)$，波动方程和热方程的齐次化辅助问题，应该把它放在哪个初值上？

展开解析：求几次时间导数，源就在第几次出现

波动辅助问题给$w(\tau)=0, w_t(\tau)=f(\tau,x)$，第二次求$t$导数时出现源。热辅助问题给$w(\tau)=f(\tau,x)$，第一次求导就出现源。两者都用$u=\int_0^t w\,d\tau$累加。

1.10 · 全章复习 · 自编检查题

练习21 输运方程

解$u_t+2u_x=x$，$u(0,x)=x^2$，区域为全直线。

展开解析：沿特征线累积源

$u=(x-2t)^2+\int_0^t[x-2(t-\tau)]\,d\tau=(x-2t)^2+xt-t^2$。初值为$x^2$；直接求导，$u_t+2u_x=x$。源函数要沿特征位置取值，不能直接写成$tx$。

1.10 · 全章复习 · 自编检查题

练习22 径向调和函数

求二维$r>0$的径向调和函数，并说明在整个平面原点有界时能留下什么。

展开解析：先化成一阶守恒式

$u''+u'/r=0$等价于$(ru')'=0$，积分得$u=A\ln r+B$。要求原点有界则$A=0$，只剩常数。三维对应的是$A/r+B$，不能把维数混用。

1.10 · 全章复习 · 自编检查题

练习23 由球外点源识别边值解

单位球内求调和函数，球面边界为$(10-6x)^{-1/2}$。写出一个满足条件的解，并说明奇点在哪里。

展开解析：把边界凑成距离平方

取球外点$(3,0,0)$，则球面上$(x-3)^2+y^2+z^2=10-6x$。故$u=1/\sqrt{(x-3)^2+y^2+z^2}$在球内调和且边界匹配。奇点在$(3,0,0)$，不在闭单位球内。

1.10 · 全章复习 · 自编检查题

练习24 高斯解的验证与极限

设$\kappa>0$、$v=t^{-1/2}\exp[-(x-\xi)^2/(4\kappa t)]$。验证$v_t=\kappa v_{xx}$，并说明为什么$t\to 0+$时在$x\neq\xi$趋于0却不意味着总量趋于0。

展开解析：用对数导数减少计算

记$d=x-\xi$。有$v_t/v=-1/(2t)+d^2/(4\kappa t^2)$，$v_{xx}/v=d^2/(4\kappa^2t^2)-1/(2\kappa t)$，两者满足关系。固定$d\neq 0$时指数衰减快于$t^{-1/2}$增长，所以趋于0；但全直线积分恒为$\sqrt{4\pi\kappa}$。峰越来越窄且越来越高，不能交换点态极限与积分。归一化后就是总量1的基本热核。

1.10 · 全章复习

42 这一章学到什么程度，再进入分离变量法

先把检查题1—13完成，确保会读方程、会建模、会写初值与边界。再做14—20，掌握行波、达朗贝尔公式与叠加齐次化；21—24用于把特征线、径向结构与热核联系起来。

回原书时先做7、8这类“只要求写出定解问题”的题，不要额外给自己增加求完整解的任务；再做1—6与9—10，最后处理带星号的特征线、奇偶性和半直线延拓。

下一章分离变量法会反复使用本章的齐次边界、叠加与初值数据。进入下一章前，至少应该能看到一题就先写对“区域、PDE、初值、左右端条件”四项；这些写错，后面的级数计算再熟也解决不了原问题。

来源、编排与掌握要求

依据用户提供的严镇军《数学物理方法》扫描本数学物理方程篇·第一章整理；正文印刷页205—234上部，章末习题234—236。扫描PDF文件页序等于印刷页码加6。按原书节序覆盖各主题，以重新讲解、推导主线和例题说明组织，未逐字复制原文。自编检查题与原书习题分开编号，原书题号可在本章习题路线中查找；本文件不声称是全部原书习题的逐题答案册。

第一轮优先掌握能独立做题所需的概念、步骤和适用条件；背景、证明及拓展均说明用途和暂缓深究的边界。数学物理方程篇·第一章含24道自编检查题及完整解析。公式与SVG内嵌，可离线阅读；屏幕答案默认折叠，打印时自动展开。整理日期：2026年10月22日。