数学物理方法 / 数学物理方程篇

数学物理方程篇·第三章学习讲义

特殊函数

认方程选分支 → 贝塞尔零点与带权展开 → 圆柱圆盘 → 勒让德展开 → 球内外与半球。按教材顺序展开概念、例题、证明主线与解题条件；每章附原书习题路线和自编检查题。

严镇军教材配套讲读　教材272—309页　32道自编检查题　离线SVG公式与图解

特殊函数不是突然多出来的一堆名字。上一章把空间问题变成特征值问题；这一章给圆柱、圆盘和球面上的特征函数起名字，并教你计算它们的导数、积分、零点和展开系数。 做题流程仍是：分离变量、选允许解、由边界确定谱、按正确权投影。

对应原书印刷页272—309，扫描PDF第278—315页；正文272—305页上部，习题305—309页。按原书3.1—3.6覆盖贝塞尔函数、性质、特征值问题、勒让德方程、母函数与递推、傅里叶—勒让德展开，拆成十四节便于学习。教材第二类贝塞尔函数记为N_ν，常见资料记为Y_ν，二者在本章采用同一标准约定；教材的p_n在这里记为P_n。

第一轮必须会：认出方程，保留区域内允许的解；正确区分阶数m和径向零点编号n；用$r\,dr$做贝塞尔投影，用dx或$\sin\theta\,d\theta$做勒让德投影；由D、N、Robin边界选择不同根和模平方；写圆柱、圆盘和轴对称球问题的级数解。熟练后再补母函数证明和复杂积分。

本章包含原书29题各小题的路线与关键结果，以及32道独立编号的自编检查题和完整解析。证明段说明保留的用途，不把第一轮可以暂缓的理论细节当成做题门槛。

学习顺序：先跟着例题写关键步骤，再独立完成检查题，最后按习题路线回到原书。证明段落均说明用途，不要求第一轮逐行背诵。

本章目录

3.1 贝塞尔函数从哪里来与怎样选解	教材272—277页
3.2 母函数递推导数与积分	教材277—282页
3.3 渐近式与零点怎样使用	教材283—284页
3.4 贝塞尔特征问题与傅里叶—贝塞尔展开	教材285—288页
3.5 圆柱中的稳态温度	教材288—290页
3.6 圆盘热传导与圆膜振动	教材290—292页
3.7 勒让德方程与多项式	教材292—296页
3.8 勒让德母函数与递推	教材296—299页
3.9 正交模平方与傅里叶—勒让德展开	教材299—302页
3.10 球内球外与半球边值问题	教材293—304页相关应用
3.11 球内点电荷与镜像法	教材302—305页
3.12 原书二十九题的路线与关键结果	教材305—309页
3.13 全章选择表与掌握要求	全章272—309页
3.14 三十二道自编检查题与完整解析	独立编号不对应原书题号

数学物理方程篇·第三章 / 3.1

贝塞尔函数从哪里来与怎样选解

教材272—277页

3.1 · 教材272—277页

01 圆柱和球面只是换了空间特征函数

笛卡尔坐标的有限区间给正弦、余弦；圆盘的径向方程给贝塞尔函数；球面轴对称的角向方程给勒让德多项式。它们都承担上一章X_n的角色。**遇到新函数，先问它解哪条方程、在哪个区间、满足哪类端点条件。**

柱坐标中$\Delta u = u_{rr} + u_r/r + u_{\phi\phi}/r^2 + u_{zz}$。对$u = R(r)\Phi(\phi)Z(z)$，角向周期条件给$\Phi = \cos m\phi, \sin m\phi$，$m = 0, 1, \ldots$。若轴向取$Z'' - k^2 Z = 0$，径向满足

$$r^2 R'' + rR' + (k^2 r^2 - m^2)R = 0.$$

令$x = kr$，就变为标准贝塞尔方程。这里m来自角向，k再由径向边界决定；两者不是同一个编号。

图 P3-1 同一套分离变量法，坐标改变空间特征函数

把空间方程认出来，就知道该用什么函数

有限直区间	圆盘、圆柱	轴对称球面
X″+λX=0	径向贝塞尔方程	勒让德方程
正弦、余弦	$J_m(kr)$、$Y_m(kr)$	$P_n(\cos\theta)$
边界决定整数或半整数	角阶m + 径向根编号n	角谱n(n+1)
普通积分或相应权	径向权为r	角权sinθ，换x后为1

共同流程：分离 → 选允许解 → 边界选谱 → 以正确权投影。

本章讲完整球面的轴对称情形；一般球面还需处理方位角。

新函数继续承担上一章的空间特征函数角色，不需要重新发明一套解题方法。

3.1 · 教材272—277页

02 标准方程与缩放：Jν的自变量不能漏常数

标准方程是

$$x^2y''+xy'+(x^2-\nu^2)y=0.$$

它的两类标准解记为$J_\nu(x)$、$Y_\nu(x)$；一般解$AJ_\nu+BY_\nu$。对$r^2R''+rR'+(k^2r^2-\nu^2)R=0$，解应写$AJ_\nu(kr)+BY_\nu(kr)$，不是$J_\nu(r)$。

对物理题常有整数$\nu=m\geq 0$。若二次项符号反过来，成为$r^2R''+rR'-(k^2r^2+\nu^2)R=0$，就涉及修正贝塞尔函数$I_\nu,K_\nu$，不直接套$J_\nu,Y_\nu$。本章正文主讲普通贝塞尔函数；知道识别正负号，避免套错即可。

3.1 · 教材272—277页

03 级数法为什么从x的非整数幂开始

$x=0$处最高阶导数系数为零，普通泰勒级数不一定覆盖全部解。原书设

$$y=x^s\sum_{j=0}^{\infty}a_jx^j,\qquad a_0\neq 0.$$

代入，最低次幂给指标方程$s^2-\nu^2=0$。取$s=\nu$时，奇次系数为零（整数重根等情形另行处理），偶次递推

$$a_{2j}=-\frac{a_{2j-2}}{4j(j+\nu)}.$$

按约定取$a_0=1/[2^\nu\Gamma(\nu+1)]$，得到

$$J_\nu(x)=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j}{j!\Gamma(j+\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2j+\nu}.$$

第一轮要会由首项判断原点行为、由递推算前几项；不必每一道边值题都重新推整条级数。取ν为一般非整数时还涉及x^ν的分支；本章实半轴$x>0$不需要展开复平面分支讨论。

3.1 · 教材272—277页

04 Γ函数在这里是阶乘的延伸，不必另开一门课

对正实数z，$\Gamma(z)=\int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}dt$，分部积分得$\Gamma(z+1)=z\Gamma(z)$。于是$\Gamma(n+1)=n!$、$\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}$。

典型计算：$\Gamma(3/2)=\sqrt{\pi}/2$、$\Gamma(5/2)=3\sqrt{\pi}/4$；用递推延拓得$\Gamma(-1/2)=-2\sqrt{\pi}$。非正整数处是极点，不可以把$\Gamma(0)$当作有限数；相应倒数在极限意义下为零。

讲这里是为了读懂J_ν级数和半整数阶公式。**第一轮掌握递推、整数值、半整数值与极点位置即可，Γ函数的完整复分析理论可以暂缓。**

3.1 · 教材272—277页

05 原点附近的两类解：为什么圆盘内常删Yν

整数$n\geq 0$时，

$$J_n(x)=\frac{1}{n!}\left(\frac{x}{2}\right)^n+O(x^{n+2}),\quad J_0(0)=1,\quad J_n(0)=0\ (n\geq 1).$$

Y_0在原点有对数奇异性；Y_n（$n\geq 1$）有负幂奇异性。因此包含轴线的实心圆柱或圆盘，若要求温度、位移有界，就保留J_n、删去Y_n。圆环不含原点，通常两者都可以留。

删项根据区域和物理要求，不根据“第二类”这个名字。 外部问题、空心圆柱、带点源的场会有别的选择。轴对称$n=0$的J_0在原点非零，不能随手加$R(0)=0$。

图 P3-2 原点有界性决定是否保留第二类贝塞尔函数



原点有界性同时承担奇异端点的分支选择，不能用一个任意零值条件代替。

3.1 · 教材272—277页

06 非整数阶与整数阶的第二个解

非整数ν时，$J_\nu, J_{-\nu}$通常线性无关；整数n时，$J_{-n}=(-1)^n J_n$，不能把它们当作两个独立解。标准第二类解定义为

$$Y_\nu(x)=\frac{J_\nu(x)\cos\pi\nu-J_{-\nu}(x)}{\sin\pi\nu},$$

整数阶取$\nu\to n$的极限。分子分母同时趋零并不意味着函数不存在。

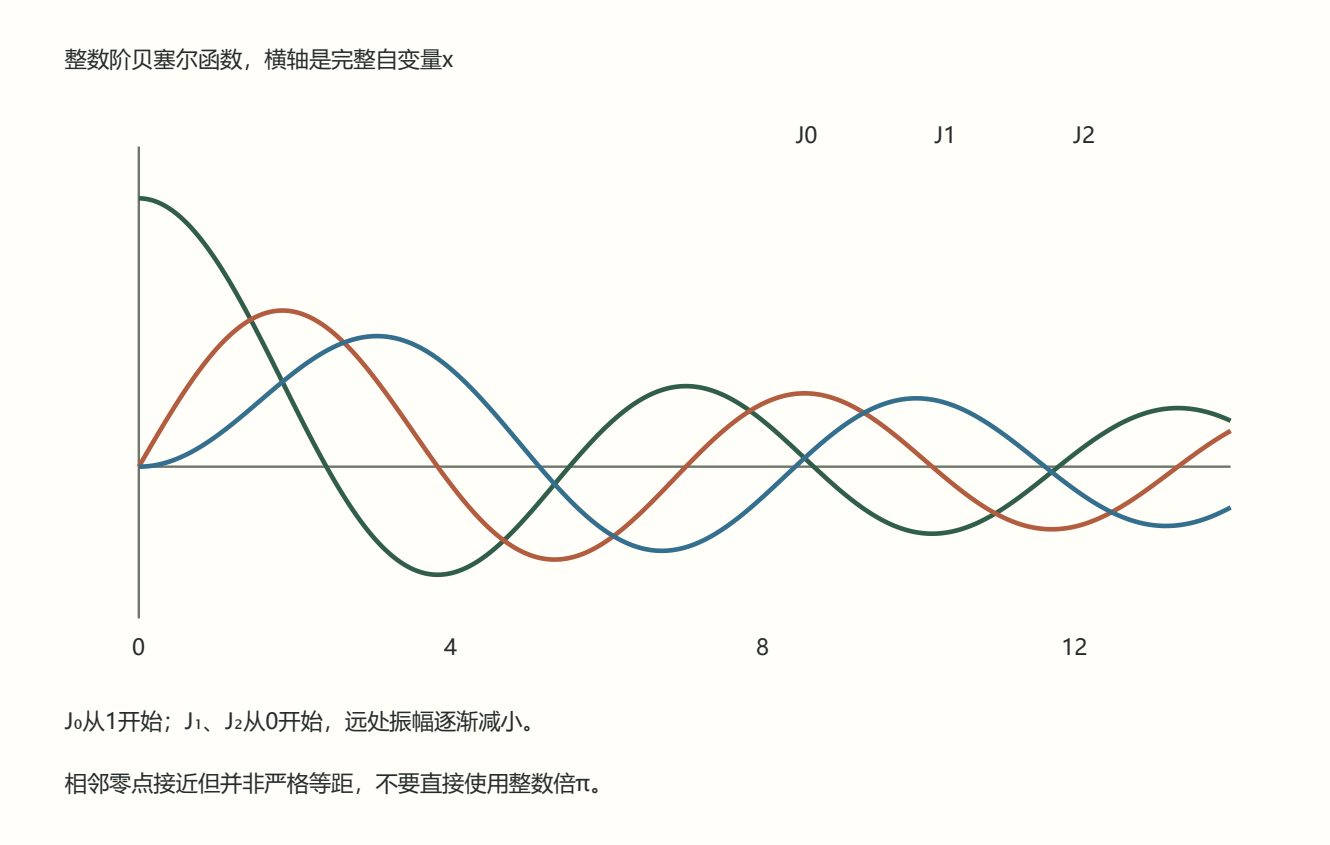
半整数阶特别简单：$J_{1/2}=\sqrt{2/(\pi x)}\sin x$、$J_{-1/2}=\sqrt{2/(\pi x)}\cos x$。它们说明贝塞尔函数和三角函数有关，但一般整数阶没有同样简单的初等表达。

3.1 · 教材272—277页

07 图形读法：阶数不是第几个波峰

贝塞尔函数也振荡，但振幅随x大体按$x^{-1/2}$减小。J_0从1开始，J_1, J_2分别从零以一次、二次行为起步。它们的零点不等距，不能直接用$n\pi$代替。

图 P3-3 J0、J1、J2的原点行为不同，零点不等距



图示 比较0、1、2阶；当前显示J0、J1、J2。图形由级数计算，横轴0到14。

常见记号$j_{m,n}$表示m阶函数J_m的第n个正零点。$J_m(j_{m,n}r/R)$中，m控制角向变化，n控制径向节点。阶数m和零点编号n各自独立。

图 P3-4 角阶m和径向编号n分别描述不同节点结构

$J_m(j_{m,n}\ r/R) \times \cos(m\varphi)$ 或 $\sin(m\varphi)$

m：函数的阶数

来自角向周期条件

决定角向节点结构

每个m有自己的一串径向根

m=0表示轴对称

n：第几个正零点

$j_{m,1} < j_{m,2} < j_{m,3} < \ldots$

决定径向内部节点圆

第n个D模态有n-1个节点圆

n从1开始，不是函数阶数

例：m=1，n=2 → $J_1(j_{1,2}\ r/R)\cos\varphi$

一条角向节点直径，加一条内部节点圆。

先固定阶数m，再按径向边界寻找该阶的一串根。

$j_{1,2}\approx 7.015586670$；既不是$J_2$的第一个根，也不是两倍$j_{1,1}$。

数学物理方程篇·第三章 / 3.2

母函数递推导数与积分

教材277—282页

3.2 · 教材277—282页

08 母函数把所有整数阶打包成一个表达式

原书给出

$$\exp\left[\frac{x}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)\right]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}J_n(x)t^n,\qquad t\neq 0.$$

把左右对t、x求导，再比较t^n系数，可得到后面递推式；把两个这样的指数相乘，可得到加法公式$J_n(x+y)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}J_k(x)J_{n-k}(y)$。

这里t是辅助变量，不是物理时间。学习母函数是为理解一组公式如何共同产生，第一轮重点是会选用递推式；不要求每次现场重建所有阶。

3.2 · 教材277—282页

09 四条关系合并记，比背十几条更可靠

最常用的一组是

$$J_{\nu-1}+J_{\nu+1}=\frac{2\nu}{x}J_\nu,\qquad J_{\nu-1}-J_{\nu+1}=2J_\nu',$$

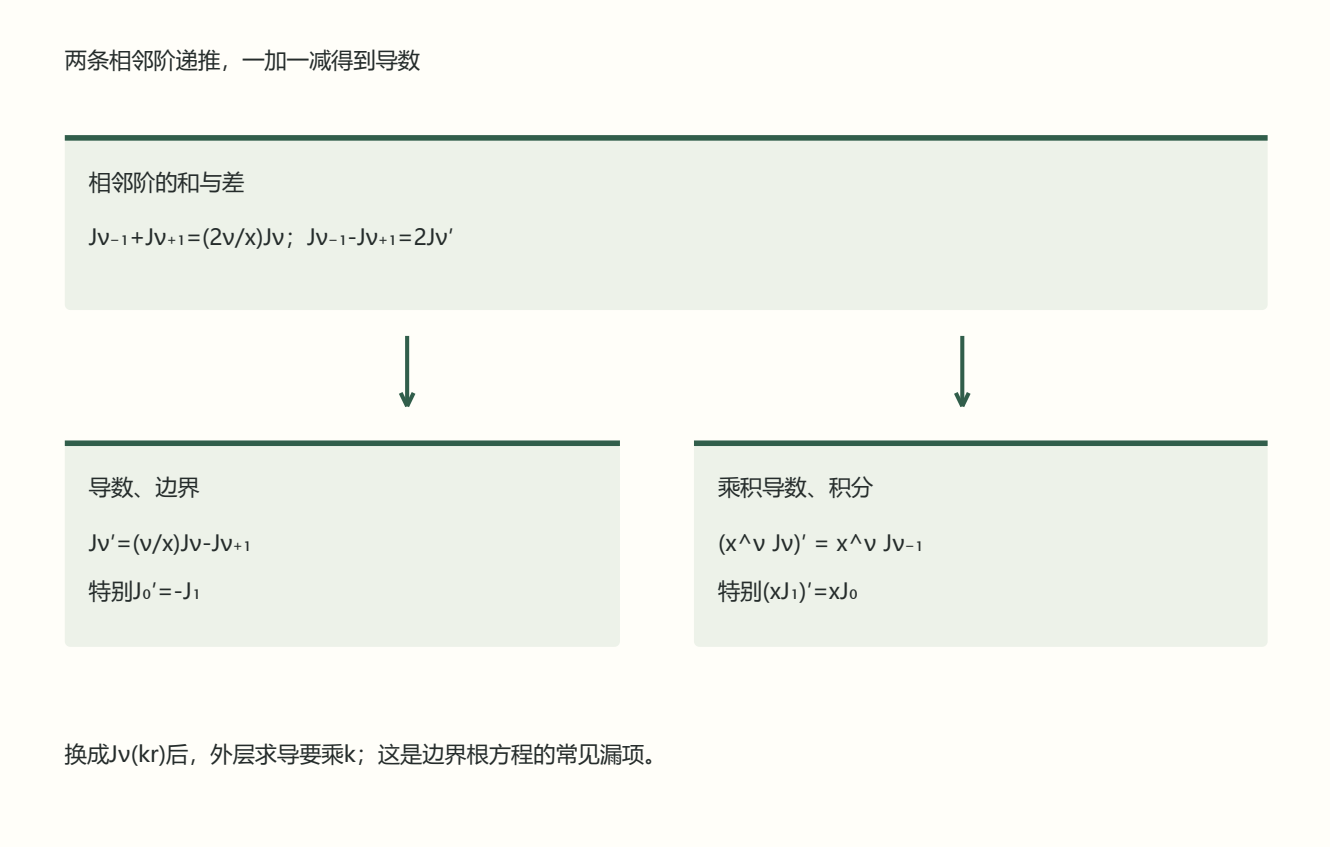
$$J_\nu'=J_{\nu-1}-\frac{\nu}{x}J_\nu=\frac{\nu}{x}J_\nu-J_{\nu+1}.$$

等价地，

$$\frac{d}{dx}\left[x^\nu J_\nu(x)\right]=x^\nu J_{\nu-1}(x),\quad \frac{d}{dx}\left[x^{-\nu}J_\nu(x)\right]=-x^{-\nu}J_{\nu+1}(x).$$

特别$J_0'=-J_1$、$(xJ_1)'=xJ_0$。积分题通常先看能否凑成这两种乘积导数，边界导数题则用$J_0'=-J_1$换成零点条件。

图 P3-5 两条递推关系产生导数、换阶与积分工具



图中x^ν表示x的ν次幂；正式公式见正文。先识别乘积导数，常可少做一次分部积分。

3.2 · 教材277—282页

10 链式法则：Jν的撇只对完整自变量求导

$$\frac{d}{dr}J_\nu(kr)=kJ'_\nu(kr),\qquad \frac{d}{dr}\left[r^\nu J_\nu(kr)\right]=kr^\nu J_{\nu-1}(kr).$$

因此$R'(R)+hR(R)=0$代入$R(r)=J_\nu(kr)$，应得到$kJ'_\nu(kR)+hJ_\nu(kR)=0$，不能漏掉k。这一个常数漏掉，特征根和单位都会错。

例：$\int rJ_0(kr)dr=rJ_1(kr)/k+C$。验证时把乘积导数写完整，结果是$rJ_0(kr)$；不是没有$1/k$的版本。

3.2 · 教材277—282页

11 常用积分如何一步步降下来

利用$(x^\nu J_\nu)'=x^\nu J_{\nu-1}$，有$\int x^2J_1(x)dx=x^2J_2(x)+C$。对$\int x^3J_0dx$，把$xJ_0dx=d(xJ_1)$，分部积分：

$$\int x^3 J_0 dx = x^3 J_1 - 2\int x^2 J_1 dx = x^3 J_1 - 2x^2 J_2 + C.$$

再用$J_2 = 2J_1/x - J_0$，可改写为$(x^3 - 4x)J_1 + 2x^2 J_0 + C$。两个答案不同外观但等价。一般多项式乘贝塞尔，先用递推把阶数与幂次对齐，再分部积分。

原书还给

$$\int x^\nu J_{\nu+1} dx = -x^\nu J_\nu + 2\nu \int x^{\nu-1} J_\nu dx$$

等递推积分。它们是计算工具，不需要全部背熟；会从导数公式推回去更稳妥。

3.2 · 教材277—282页

12 积分表示与拉普拉斯积分：选取与题型相符的工具

整数n可用

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(x\sin\theta - n\theta)} d\theta.$$

特别$J_0(x) = \pi^{-1}\int_0^\pi \cos(x\cos\theta)d\theta$。代入带指数的积分并交换次序，可得$a>0$时

$$\int_0^\infty e^{-ax} J_0(bx) dx = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

由$J_0' = -J_1$分部积分，得到$\mathcal{L}[J_1](s) = 1 - s/\sqrt{s^2+1}$，$s>0$。这与前面拉普拉斯变换的附表衔接。

第一轮会识别“指数衰减乘贝塞尔”可以用积分表示或变换；不用强迫自己把每种特殊积分都化成初等函数。交换积分需要绝对收敛等理由，这里$a>0$提供衰减。

3.2 · 教材277—282页

13 母函数产生的三角展开：原书例1的用途

令$t = e^{i\theta}$，合并n与$-n$的项，得到

$$\cos(x\sin\theta) = J_0(x) + 2\sum_{j\ge 1} J_{2j}(x)\cos 2j\theta,$$

$$\sin(x\sin\theta) = 2\sum_{j\ge 0} J_{2j+1}(x)\sin[(2j+1)\theta].$$

例如$\theta = 0$得$1 = J_0 + 2\sum J_{2j}$；$\theta = \pi/2$得$\cos x = J_0 + 2\sum(-1)^j J_{2j}$、$\sin x = 2\sum(-1)^j J_{2j+1}$。

讲这一段为原书习题5提供直接路线，也说明“指数形式、三角形式、整数阶求和”可以互相转换。普通边值题不需要使用这些展开时，可以先跳过繁琐证明。

数学物理方程篇·第三章 / 3.3

渐近式与零点怎样使用

教材283—284页

3.3 · 教材283—284页

14 远处像衰减的余弦，不等于处处就是余弦

固定阶数ν、正实$x \to \infty$时，

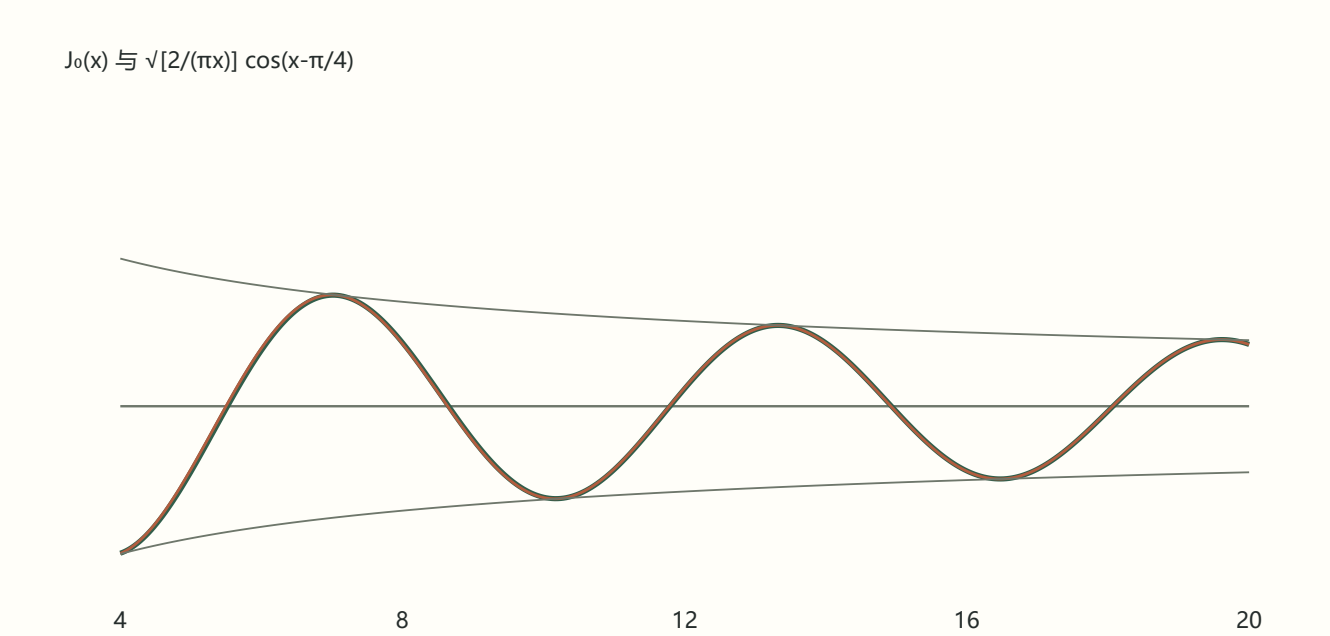
$$J_\nu(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right),$$

$$Y_\nu(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right).$$

原书用$y = w/\sqrt{x}$把方程化为$w'' + [1 + (1/4 - \nu^2)/x^2]w = 0$，解释为什么大$x$近似简谐振荡；完整渐近误差证明可以暂缓。

用途： 估计高阶零点、判断远场振荡与幅度；不能用大x近似解释原点，也不能把首个零点直接当作精确值。

图 P3-6 固定阶的大自变量近似：振荡相位与衰减包络



仅展示正实轴4≤x≤20；渐近式适合估计高编号根，不能把首根近似当精确值。

3.3 · 教材283—284页

15 正零点的编号与近似，先辨根再代入

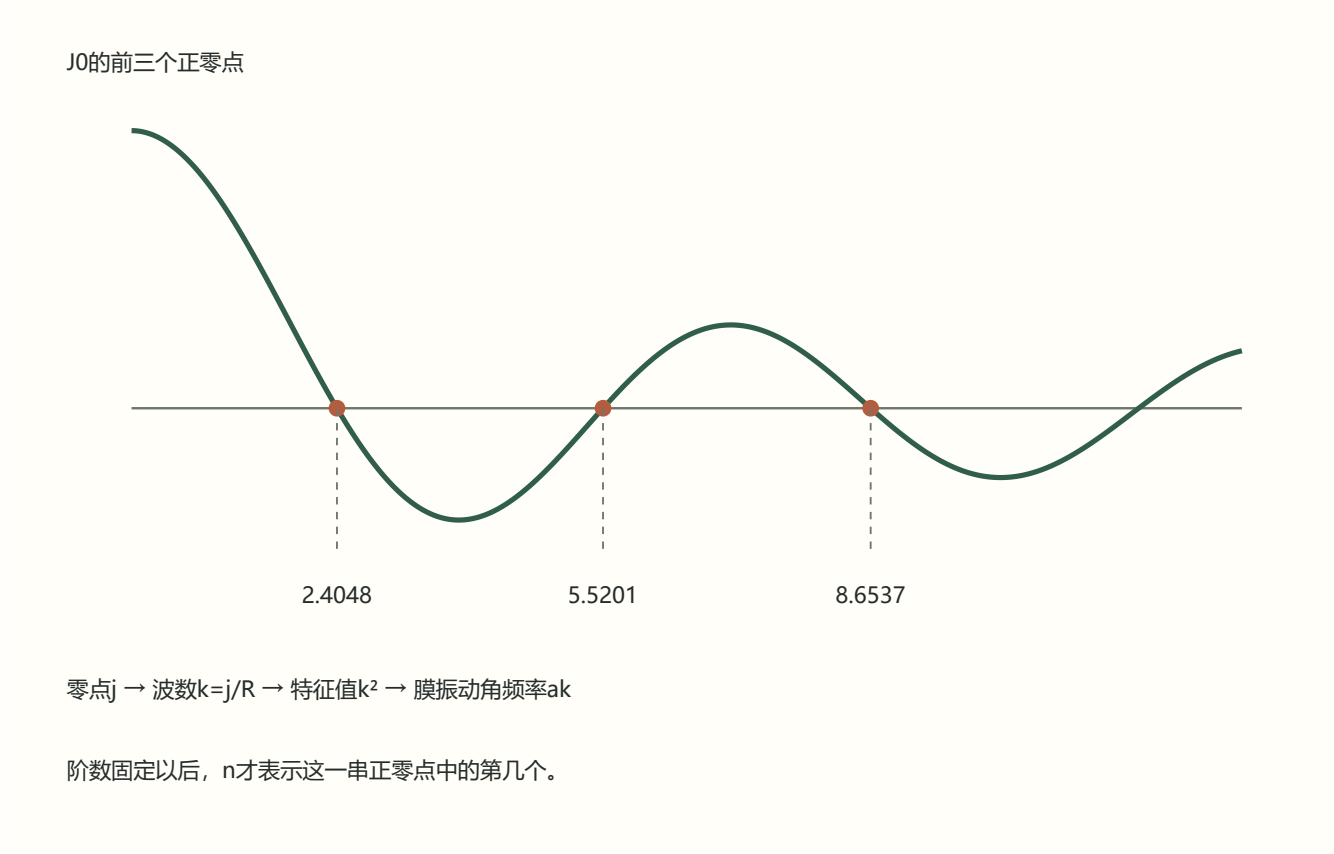
对固定$m \geq 0$，J_m有一串正零点$j_{m,1} < j_{m,2} < \cdots$，高编号近似

$$j_{m,n} \approx \left(n + \frac{m}{2} - \frac{1}{4}\right)\pi.$$

常用值：$j_{0,1} \approx 2.404825558$、$j_{0,2} \approx 5.520078110$、$j_{1,1} \approx 3.831705970$。这些是数值，不是可化简的整数倍$\pi$。

边界$J_m(kR) = 0$给$k = j_{m,n}/R$，特征值通常是k^2。根j、波数k、特征值k^2、角频率ak是四个不同量。原点处$J_m(0) = 0$对$m \geq 1$不代表$k = 0$自动给一个非零模态，要回到$k = 0$的原方程和边界判断。

图 P3-7 根、波数、特征值和频率四者依次转换



图示 J0的前三个正根；所示阶数m=0。零点编号从1开始，原点的函数零值不列作正零点。

数学物理方程篇·第三章 / 3.4

贝塞尔特征问题与傅里叶—贝塞尔展开

教材285—288页

3.4 · 教材285—288页

16 正交积分的权r来自径向算子

径向问题写成

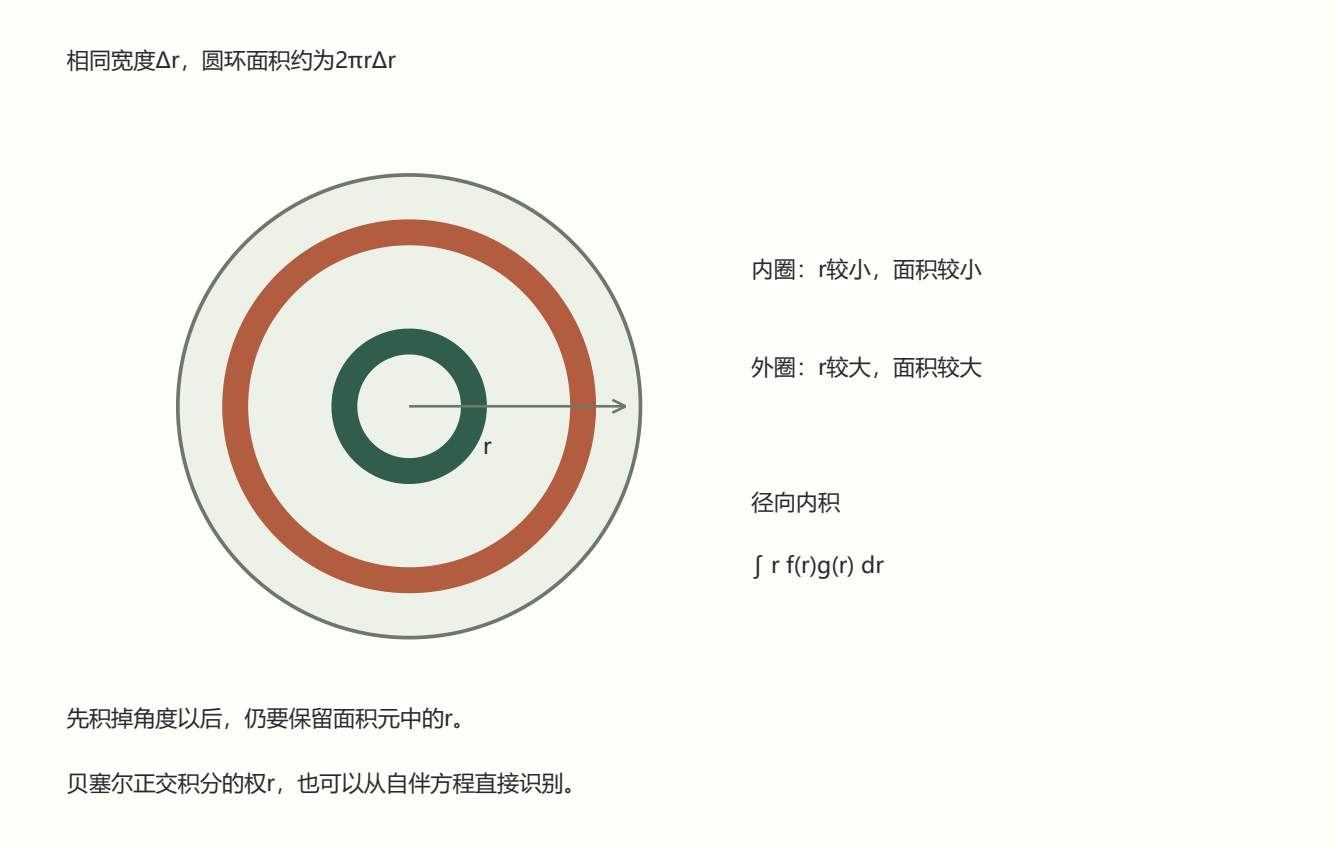
$$-(rR')' + \frac{m^2}{r}R = k^2 rR, \qquad 0 < r < R_0.$$

所以权为r。原点取有界或正则分支，外圆给相同的自伴边界；不同特征值的函数满足

$$\int_0^{R_0} rJ_m(k_n r)J_m(k_j r)dr = 0, \quad n \neq j.$$

这也符合圆盘面积元$r\,dr\,d\phi$：外侧同样宽度的一圈比内侧面积更大。**把系数积分写成$\int f J_m dr$会投影到错误的内积。**

图 P3-8 同样宽的外圈面积更大，径向投影要乘r



两条加粗圆环示意相同径向宽度；颜色强调外圈面积比内圈大。

3.4 · 教材285—288页

17 模平方先给统一式，再按边界简化

对$k>0$，积分恒等式为

$$N=\int_0^{R_0} rJ_m(kr)^2dr=\frac{R_0^2}{2}\left[J_m'(z)^2+\left(1-\frac{m^2}{z^2}\right)J_m(z)^2\right],\quad z=kR_0.$$

若D边界$J_m(z)=0$，由$J_m'(z)=-J_{m+1}(z)$得到$N=R_0^2J_{m+1}(z)^2/2$。

若N边界$J_m'(z)=0$且$k>0$，则$N=(R_0^2/2)(1-m^2/z^2)J_m(z)^2$。

若Robin边界$kJ_m'(z)+hJ_m(z)=0$，则

$$N=\frac{R_0^2}{2}\left[1+\frac{h^2R_0^2-m^2}{z^2}\right]J_m(z)^2.$$

教材把模写作N_ν，模平方写N_ν^2；这里直接用N表示积分本身，**分母不要再平方一次**。零模态$k=0$另算，不套含$1/z^2$的式子。

3.4 · 教材285—288页

18 三种外圆边界选不同的根，正性要看条件

外圆边界	根方程	需要注意
$R(R_0)=0$	$J_m(z)=0$	取正零点$j_{m,n}$
$R'(R_0)=0$	$J'_m(z)=0$	$m=0$另有常数零模态
$R'(R_0)+hR(R_0)=0$	$zJ'_m(z)+hR_0J_m(z)=0$	导数前的k不可漏

物理散热$h\geq 0$时，可用上一章能量式判断非负性；$h>0$的圆盘没有常数零模态。教材更一般的$\alpha R+\beta R'=0$若系数任意，不能不检查就断言特征值全为正。负谱情形可能需要修正贝塞尔函数，基础物理散热题先按题设排除。

图 P3-9 D、N、Robin边界对应不同根与模平方



对N边界，只写J_1正根会漏掉k=0常数模态；k=0不应代入含1/k的正模态公式。

3.4 · 教材285—288页

19 系数通式：函数阶数、区间、边界、权四项缺一不可

若$X_n(r)=J_m(k_n r)$构成所选边界下的系统，则

$$f(r)=\sum_n c_n X_n(r),\qquad c_n=\frac{\int_0^{R_0} r f(r)X_n(r)\,dr}{\int_0^{R_0} r X_n(r)^2\,dr}.$$

若D边界$k_n=j_{m,n}/R_0$，就用上节D模平方。N边界$m=0$时，常数模态系数是$\bar f=2R_0^{-2}\int_0^{R_0} r f(r)dr$，其余按正根展开。

逐段光滑初始数据通常可在适当意义下展开；内部跳跃点恢复左右平均。D基函数在外端每项都为零，不能声称它在$f(R_0)\neq 0$时还逐点等于该非零端值。热问题可在$t>0$立即满足边界，初边界角点需另说相容性。

3.4 · 教材285—288页

20 原书例1：1减r平方的系数为什么含三次零点

单位圆D边界，记$\alpha_n=j_{0,n}$，展开$f(r)=1-r^2$。分子

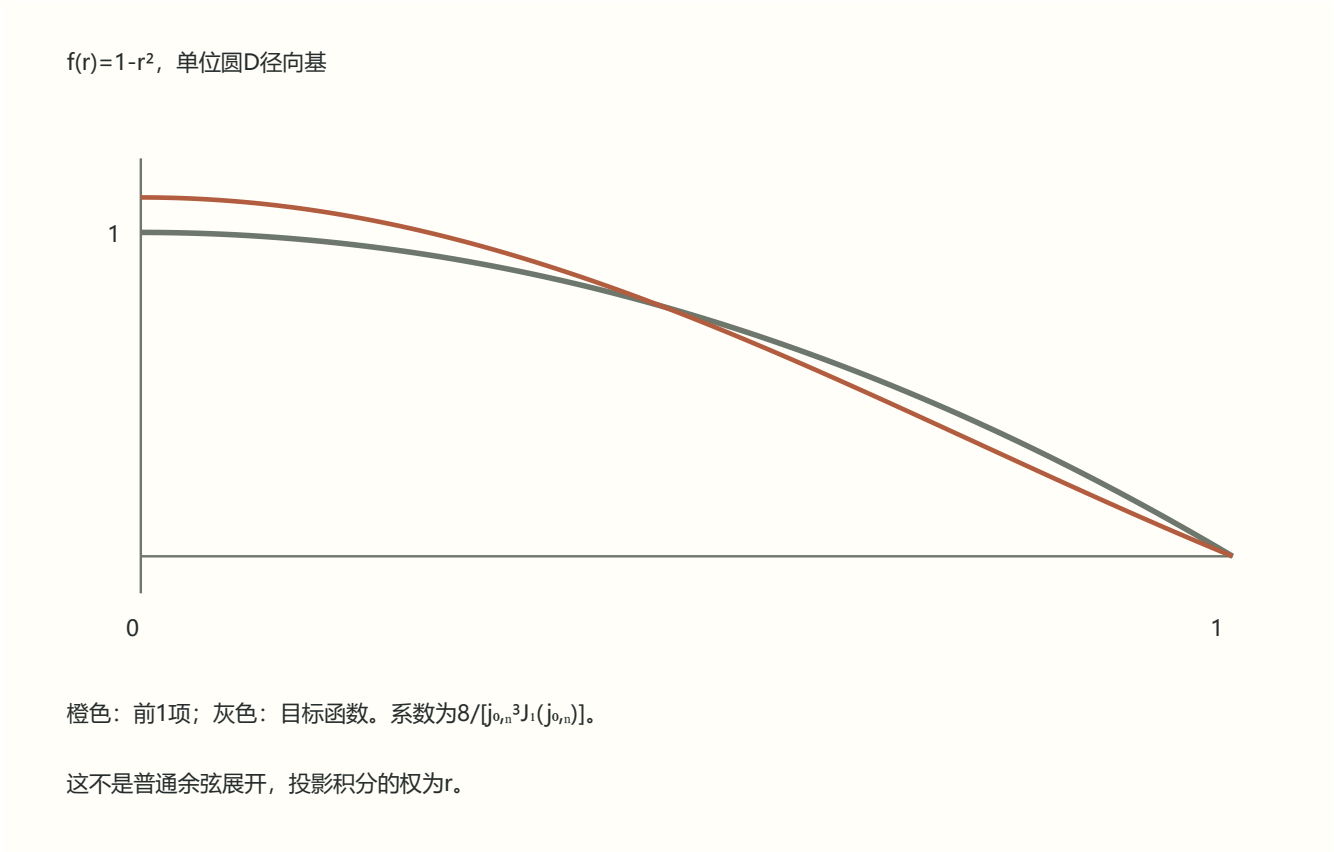
$$I_n=\int_0^1 r(1-r^2)J_0(\alpha_n r)\,dr=\frac{2J_2(\alpha_n)}{\alpha_n^2}=\frac{4J_1(\alpha_n)}{\alpha_n^3}.$$

第一步用$(rJ_1(\alpha r))'=\alpha r J_0(\alpha r)$分部积分；第二步用$J_2(\alpha)=2J_1(\alpha)/\alpha$，因为$J_0(\alpha)=0$。分母$N_n=J_1(\alpha_n)^2/2$，故

$$1-r^2=\sum_{n\ge 1}\frac{8}{\alpha_n^3 J_1(\alpha_n)}J_0(\alpha_n r),\quad 0\le r\le 1.$$

不要从“系数按三次幂”就忽略$J_1(\alpha_n)$的大小和符号。实际算前几项时，分母的贝塞尔值同样要算。

图 P3-10 径向抛物线由J0的离散径向模态拼成



图示 取1个径向模态；当前保留1个径向模态；每一项都在r=1为零、在原点有界。

数学物理方程篇·第三章 / 3.5

圆柱中的稳态温度

教材288—290页

3.5 · 教材288—290页

21 侧面绝热的圆柱：常数模态对应轴向线性项

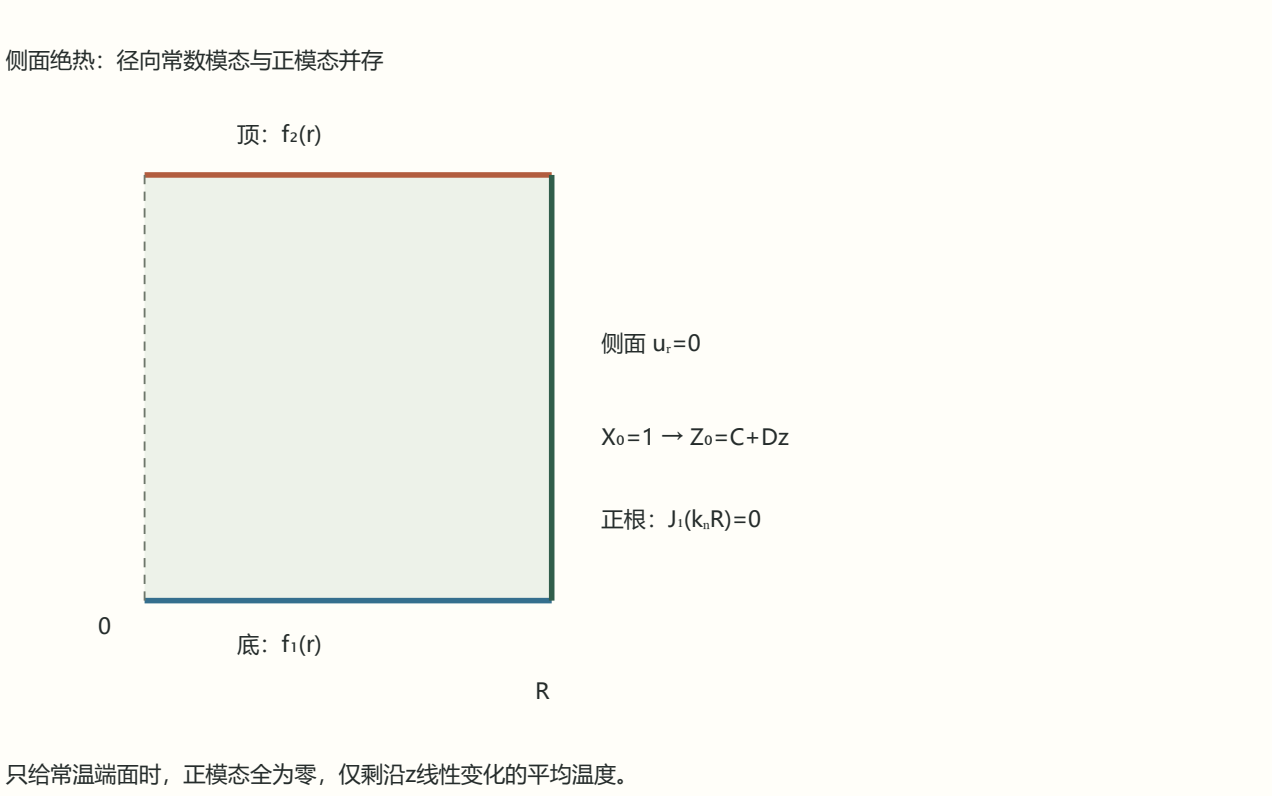
原书例2：半径R、高H圆柱，侧面绝热，底顶温度分别为$f_1(r), f_2(r)$，轴对称稳态。方程$u_{rr}+u_r/r+u_{zz}=0$，侧面$u_r(R,z)=0$。

径向特征函数$X_0=1$、$X_n=J_0(k_n r)$，$J_1(k_n R)=0$、$n\ge 1$。把底顶数据各按r权展开，系数记$f_{i,n}$。零模态的轴向方程$Z_0''=0$，正模态$Z_n''-k_n^2 Z_n=0$，得到

$$u(r,z)=f_{1,0}\left(1-\frac{z}{H}\right)+f_{2,0}\frac{z}{H}+\sum_{n\ge 1}\left[f_{1,n}\frac{\sinh k_n(H-z)}{\sinh k_n H}+f_{2,n}\frac{\sinh k_n z}{\sinh k_n H}\right]J_0(k_n r).$$

其中$f_{i,0}=2R^{-2}\int_0^R rf_i(r)dr$。**若漏了常数模态，常温底顶数据都无法正确表示。** 这里z是空间，双曲正弦不是时间增长。

图 P3-11 侧面绝热时，径向常数模态承担端面平均值



图示轴对称半剖面r∈[0,R]、z∈[0,H]；左侧虚线是轴线，不是外圆边界。

3.5 · 教材288—290页

22 侧面固定零温度：用J0零点换掉J1零点

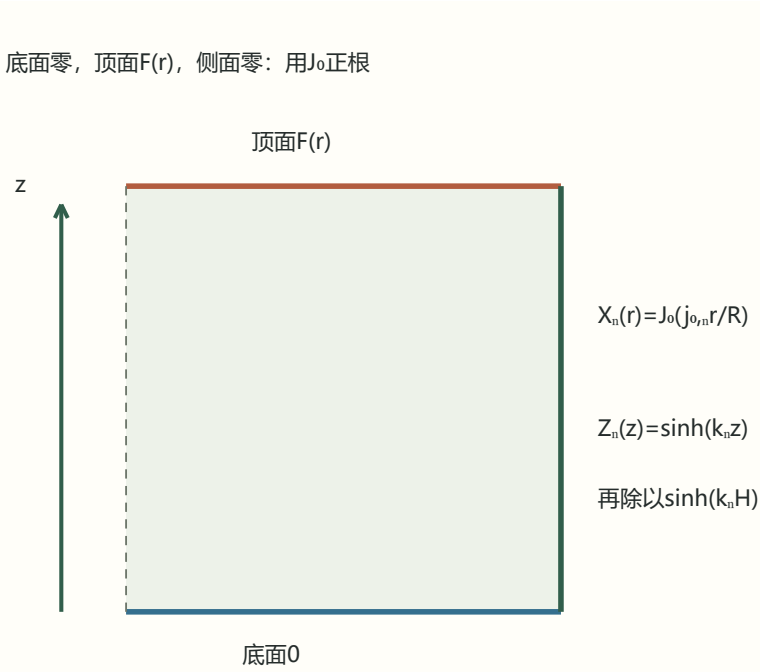
若侧面$u(R,z)=0$，径向用$X_n=J_0(j_{0,n}r/R)$，没有零模态。底面零、顶面$f(r)$时，

$$u(r,z)=\sum_{n\ge1} f_n\frac{\sinh(k_nz)}{\sinh(k_nH)}J_0(k_nr),\quad k_n=j_{0,n}/R,$$

$$f_n=\frac{2}{R^2J_1(j_{0,n})^2}\int_0^R rf(r)J_0(k_nr)dr.$$

顶面恒温T_0时$f_n=2T_0/[j_{0,n}J_1(j_{0,n})]$。顶面与侧面交圈若给出不同温度，交圈处不能要求同一个连续值；级数表达区域内部及各面内部的边界极限。

图 P3-12 侧面零温时，端面展开乘轴向双曲正弦



图示半剖面；归一化的轴向因子Z(z)=sinh(kz)/sinh(kH)在底面为0、顶面为1。

3.5 · 教材288—290页

23 侧面散热：改变径向谱，轴向形式保持

若侧面$u_r(R,z)+hu(R,z)=0$，$h>0$，根方程$-kJ_1(kR)+hJ_0(kR)=0$。投影用Robin模平方；底面零、顶面f时，轴向归一因子仍是$\sinh(k_nz)/\sinh(k_nH)$。

这正是原书习题19的路线。没有必要把整套分离法重新背一遍：**变的是径向边界、根、模平方，不变的是如何匹配两个轴向端面。** 若外界温度非零，先减去合适提升再做齐次边界。

数学物理方程篇·第三章 / 3.6

圆盘热传导与圆膜振动

教材290—292页

3.6 · 教材290—292页

24 一般圆盘初温：角傅里叶与径向贝塞尔双重展开

圆盘$r<R$上$u_t=\kappa\Delta_2 u$、圆周零温、初温$f(r,\phi)$。每个角阶m对应自己的径向根$k_{m,n}=j_{m,n}/R$。解为

$$u=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\kappa k_{m,n}^2 t}J_m(k_{m,n}r)\left[A_{m,n}\cos m\phi+B_{m,n}\sin m\phi\right].$$

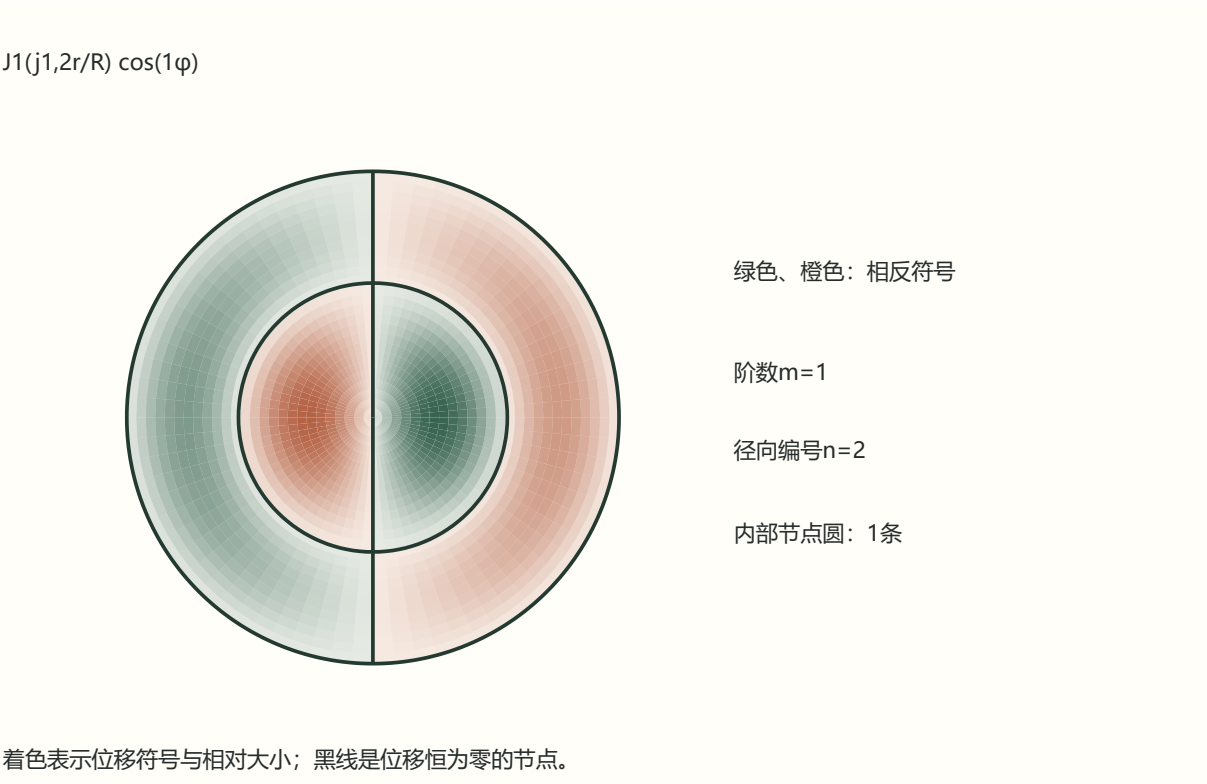
$m=0$时正弦恒零，应置$B_{0,n}=0$。令$N_{m,n}=\int_0^R rJ_m(k_{m,n}r)^2dr$，则

$$A_{0,n}=\frac{1}{2\pi N_{0,n}}\int_0^R\int_0^{2\pi} rf J_0(k_{0,n}r)d\phi\,dr,$$

$$A_{m,n}=\frac{1}{\pi N_{m,n}}\int_0^R\int_0^{2\pi} rf J_m(k_{m,n}r)\cos m\phi\,d\phi\,dr\quad(m\ge 1),$$

$B_{m,n}$把余弦换正弦。**角向常数的模平方是2π，非零阶余弦、正弦是π；不能统一抄同一个前因子。**

图 P3-13 圆盘模态的节点圆与角向节点线



图示 m=1，n=2；角向节点直径数为1，内部节点圆数为1；圆周是固定边缘。

3.6 · 教材290—292页

25 轴对称冷却：只留m等于零，最慢模态决定长期

原书例3初温只依赖r，所以只留$m=0$。圆周零温：

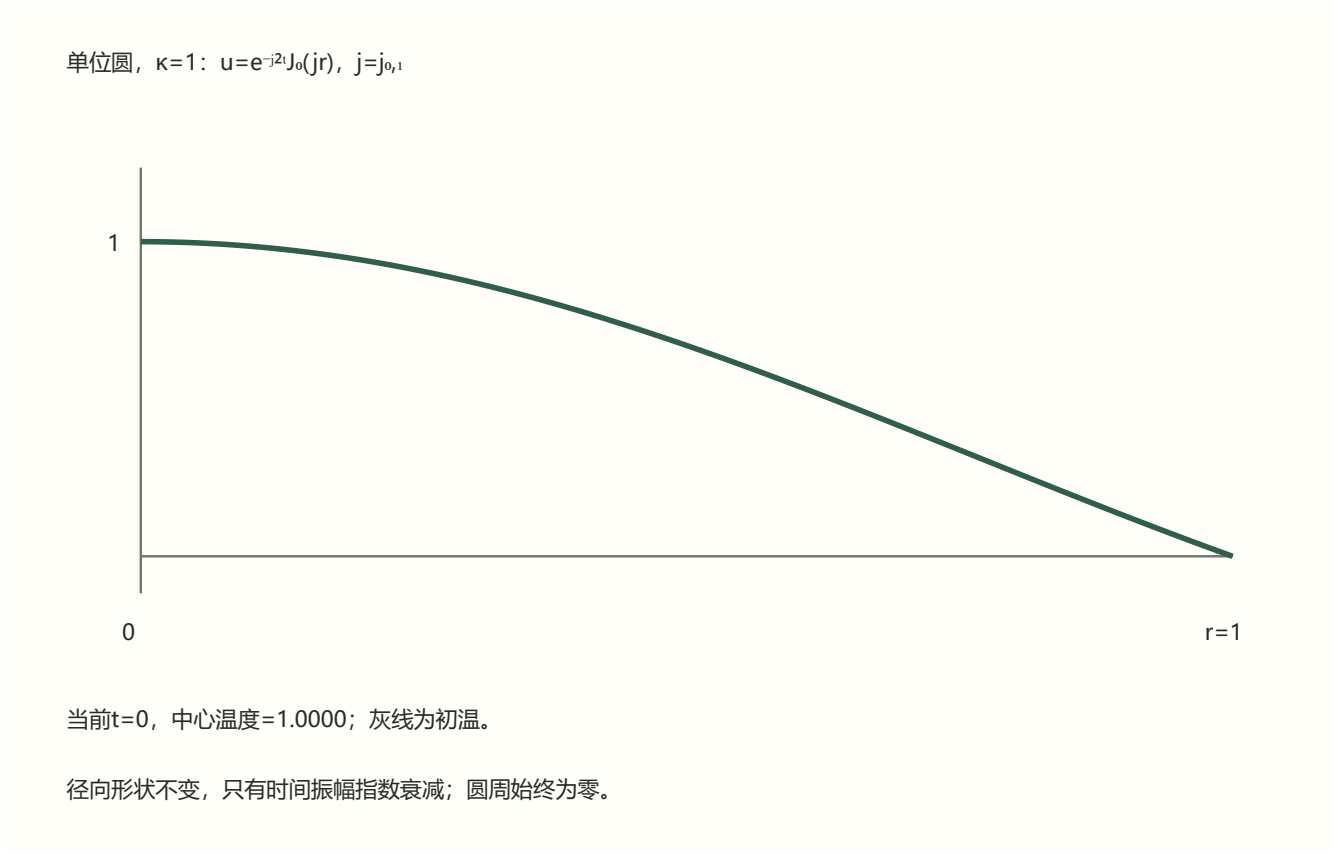
$$u(t,r)=\sum_{n\ge 1} c_n e^{-\kappa(j_{0,n}/R)^2 t} J_0(j_{0,n} r/R).$$

若初温恒为U_0，$c_n=2U_0/[j_{0,n}J_1(j_{0,n})]$。若侧面恒为$U_b$而初温零，则先写$u=U_b+w$，得到

$$u(t,r)=U_b\left[1-\sum_{n\ge 1}\frac{2}{j_{0,n}J_1(j_{0,n})}e^{-\kappa(j_{0,n}/R)^2 t}J_0(j_{0,n} r/R)\right].$$

长期趋U_b。数据初时不匹配圆周温度，角点按内部初值理解。高径向模态更快衰减；第一模态系数若非零，它决定长时间主要形状。

图 P3-14 单个圆盘热模态保持形状并指数衰减



图示 t=0；这是一个精确的单模态解；衰减率为$j_{0,1}^2 \approx 5.783185963$。

3.6 · 教材290—292页

26 圆膜振动：空间基相同，时间因子改为振荡

圆膜$u_{tt} = a^2 \Delta_2 u$、边缘固定，固有角频率

$$\omega_{m,n} = a \frac{j_{m,n}}{R}.$$

模态为$J_m(j_{m,n} r/R) \cos m\phi$或正弦版本，时间因子$C \cos \omega_{m,n} t + D \sin \omega_{m,n} t$。初位移系数给$C$，初速度系数还要除以$\omega_{m,n}$。

m给直径方向的角向节点结构，径向内部有$n-1$条节点圆；完整圆膜中$m \geq 1$的角向正弦余弦简并。半圆膜的直径也固定时，角向用$\sin m\phi$、$m \geq 1$，因此不能使用完整圆的轴对称$m = 0$最低模态。

数学物理方程篇·第三章 / 3.7

勒让德方程与多项式

教材292—296页

3.7 · 教材292—296页

27 球坐标先说明轴对称，别默认所有球问题都只有P_n

三维球坐标的轴对称调和方程为

$$\frac{1}{r^2}\partial_r(r^2u_r)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\partial_\theta(\sin\theta\,u_\theta)=0.$$

轴对称表示绕选定轴旋转不变，与方位角ϕ无关。设$u=R(r)\Theta(\theta)$，得到

$$(r^2R')'-\lambda R=0,\qquad \frac{1}{\sin\theta}(\sin\theta\,\Theta')'+\lambda\Theta=0.$$

令$x=\cos\theta$、$\Theta=y(x)$，角向变成

$$(1-x^2)y''-2xy'+\lambda y=0,\qquad -1<x<1.$$

一般非轴对称球问题还会出现连带勒让德函数与球谐函数；它们不是本章主要范围。**看到球形区域仍先检查边界是否轴对称，不能不加说明地删掉方位角。**

3.7 · 教材292—296页

28 两极的有界性选出n乘n加一

对完整球面，$x=\pm1$分别是两极，要求角函数允许的有界正则行为。可选特征值为$\lambda_n=n(n+1)$，$n=0,1,\dots$；相应有界解按$P_n(1)=1$归一化，得到勒让德多项式。

另一个标准解Q_n在端点奇异，完整球面常因有界性排除。只要求一个极点有界、或角区间截去端点时，结论可能不同，不能把所有勒让德方程参数都强行取整数。

本题自伴形式$-[(1-x^2)y']'=\lambda y$，权为1。若仍用角度θ积分，权变为$\sin\theta$。这不是两套不同理论，而是变量替换$dx=-\sin\theta\,d\theta$。

3.7 · 教材292—296页

29 Rodrigues公式：从一条式子生成低阶多项式

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n.$$

原书先对$(x^2-1)^n$的导数建立关系，证明得到的函数满足勒让德方程；这个证明说明它不是随便选出的多项式。

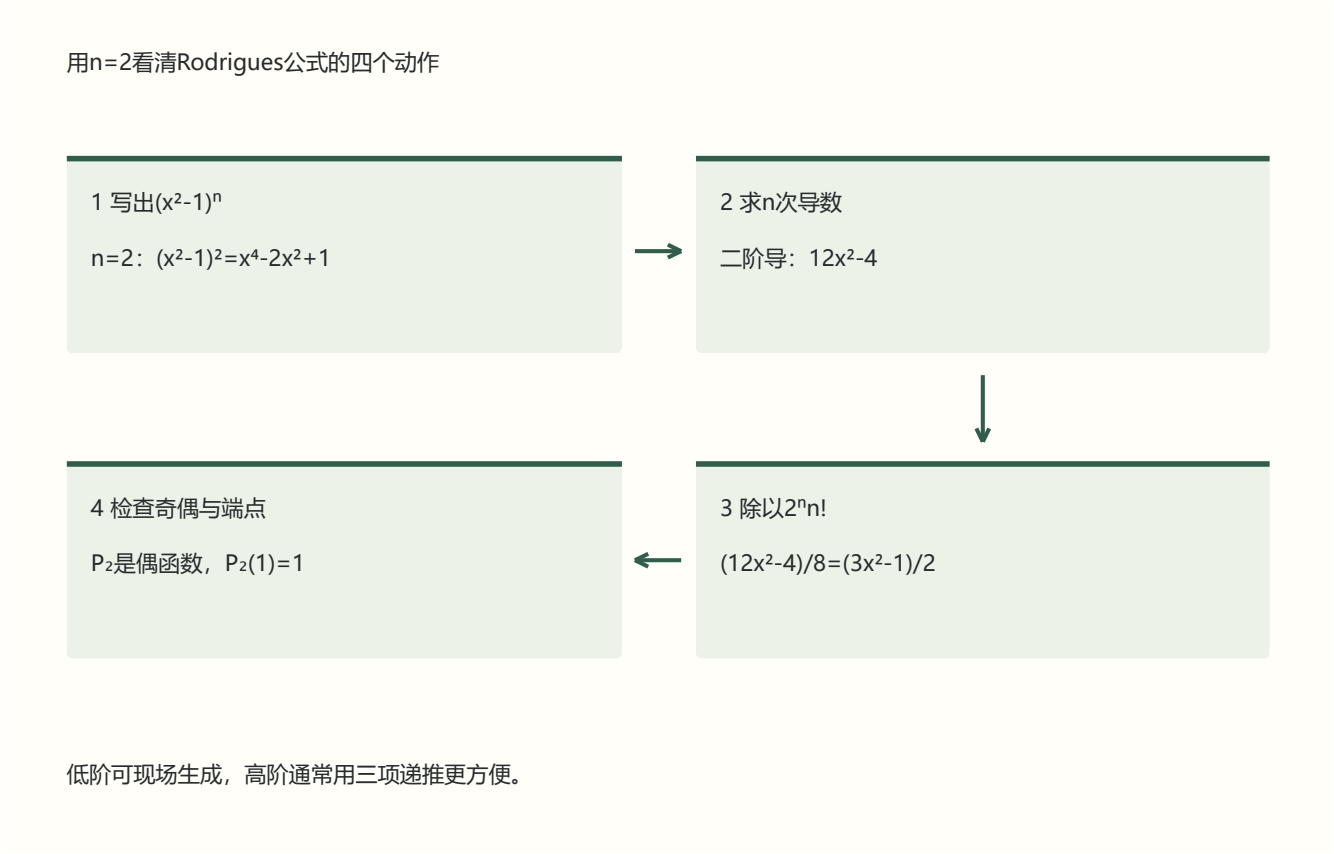
常用低阶表：

$$P_0=1,\quad P_1=x,\quad P_2=\frac{3x^2-1}{2},\quad P_3=\frac{5x^3-3x}{2},$$

$$P_4=\frac{35x^4-30x^2+3}{8},\quad P_5=\frac{63x^5-70x^3+15x}{8}.$$

第一轮熟记P_0到P_3，P_4及更高阶可用递推。多项式展开题通常用低阶表达式比较系数最快，不必每次求n次导数。

图 P3-15 Rodrigues公式只需按固定顺序求导与归一化



按上排从左向右、下排从右向左阅读；归一化常数不能漏掉n!。

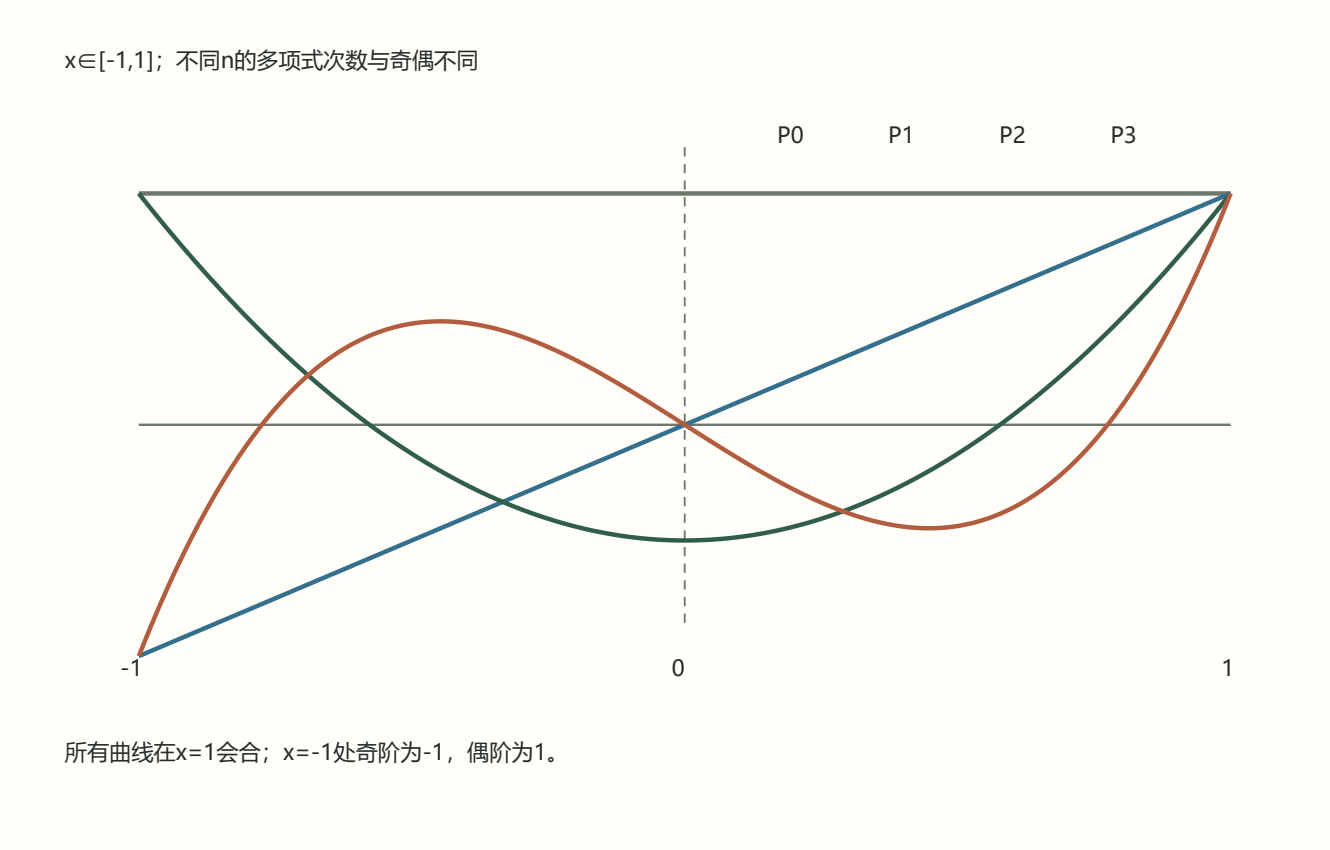
3.7 · 教材292—296页

30 奇偶性和端点值是免费简化工具

$$P_n(-x)=(-1)^nP_n(x),\qquad P_n(1)=1,\qquad P_n(-1)=(-1)^n.$$

因此偶函数只含偶阶，奇函数只含奇阶。偶阶$P'_{2k}(0)=0$；奇阶$P_{2k+1}(0)=0$。半球的赤道边界会据此选择奇阶或偶阶。

图 P3-16 低阶勒让德多项式满足P_n(1)=1



图示 比较P0至P3；当前显示P0、P1、P2、P3；这是普通x变量图，不是球内温度等值线。

图 P3-17 原点值与原点导数筛选半球的奇阶或偶阶

赤道x=cosθ=0：检查函数值还是检查导数?

奇阶P_{2k+1}

$P_{2k+1}(0)=0$

关于x=0反对称

适合赤道零温条件

完整球面奇数据只含奇阶

偶阶P_{2k}

$P_{2k}'(0)=0$

关于x=0对称

适合赤道绝热条件

包含常数$P_0=1$

$P_1(x)=x$：过原点；$P_2(x)=(3x^2-1)/2$：原点切线水平。

奇偶选择减少系数积分，也能快速检查展开答案。

零温对应值为零；绝热对应法向导数为零；不要把两者反过来。

这些性质不仅节省积分，还能检查答案。例如x^2的展开若出现P_1，无需继续算就知道错了。

数学物理方程篇·第三章 / 3.8

勒让德母函数与递推

教材296—299页

3.8 · 教材296—299页

31 母函数里的参数和空间变量分开命名

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}}=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)t^n,\qquad |t|<1,\ -1\le x\le 1.$$

这里t是展开参数。原书例题中把距离表达式化成左侧，就能立即读出各阶系数；这比每次做带P_n的积分快得多。

对t求导并比较系数得三项递推：

$$(n+1)P_{n+1}=(2n+1)xP_n-nP_{n-1}.$$

例如$n=1$给$2P_2=3xP_1-P_0=3x^2-1$。**母函数是产生递推和距离展开的工具，不是每题都要重新证明的前置任务。**

3.8 · 教材296—299页

32 导数关系优先记两条，其余现推

$$P'_{n+1}-P'_{n-1}=(2n+1)P_n\quad(n\ge 1),$$

$$(1-x^2)P'_n=n(P_{n-1}-xP_n)\quad(n\ge 1).$$

第二式可避免直接微分高阶多项式；第一式积分后给

$$\int P_n(x)dx=\frac{P_{n+1}(x)-P_{n-1}(x)}{2n+1}+C,\quad n\ge 1.$$

$n=0$单独用$\int P_0dx=x+C$。把公式的编号范围一起记住，不能把P_{-1}临时乱定义来凑。

原书还有$(n+1)P_{n+1}=x(n+1)P_n+(x^2-1)P'_n$等等价式，通常由上面两条及三项递推即可得到。

3.8 · 教材296—299页

33 两类典型积分，先看奇偶和次数再动手

因为P_n与低于n次的多项式正交，$\int_{-1}^{1}x^mP_ndx=0$若$m<n$；若$m+n$为奇数，也为零。余下可用Rodrigues分部积分n次求值。

对$\int P_n$在半区间的积分，直接用上一节原函数。例如$n\ge 1$，

$$\int_0^1 P_n(x)dx=\frac{P_{n-1}(0)-P_{n+1}(0)}{2n+1}.$$

所以正偶阶积分为零，奇阶不一定为零。原书的阶跃展开、半球恒温问题都会用到它，讲这个积分有直接做题价值。

数学物理方程篇·第三章 / 3.9

正交模平方与傅里叶—勒让德展开

教材299—302页

3.9 · 教材299—302页

34 正交性与模平方：系数中的2n加1从这里来

$$\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)dx = \frac{2}{2n+1}\delta_{mn}.$$

不同特征值的正交性由自伴形式得来；模平方可由母函数乘积积分，或三项递推与归一化计算。第一轮知道来源并会使用，不必背冗长的二重求和证明。

因此

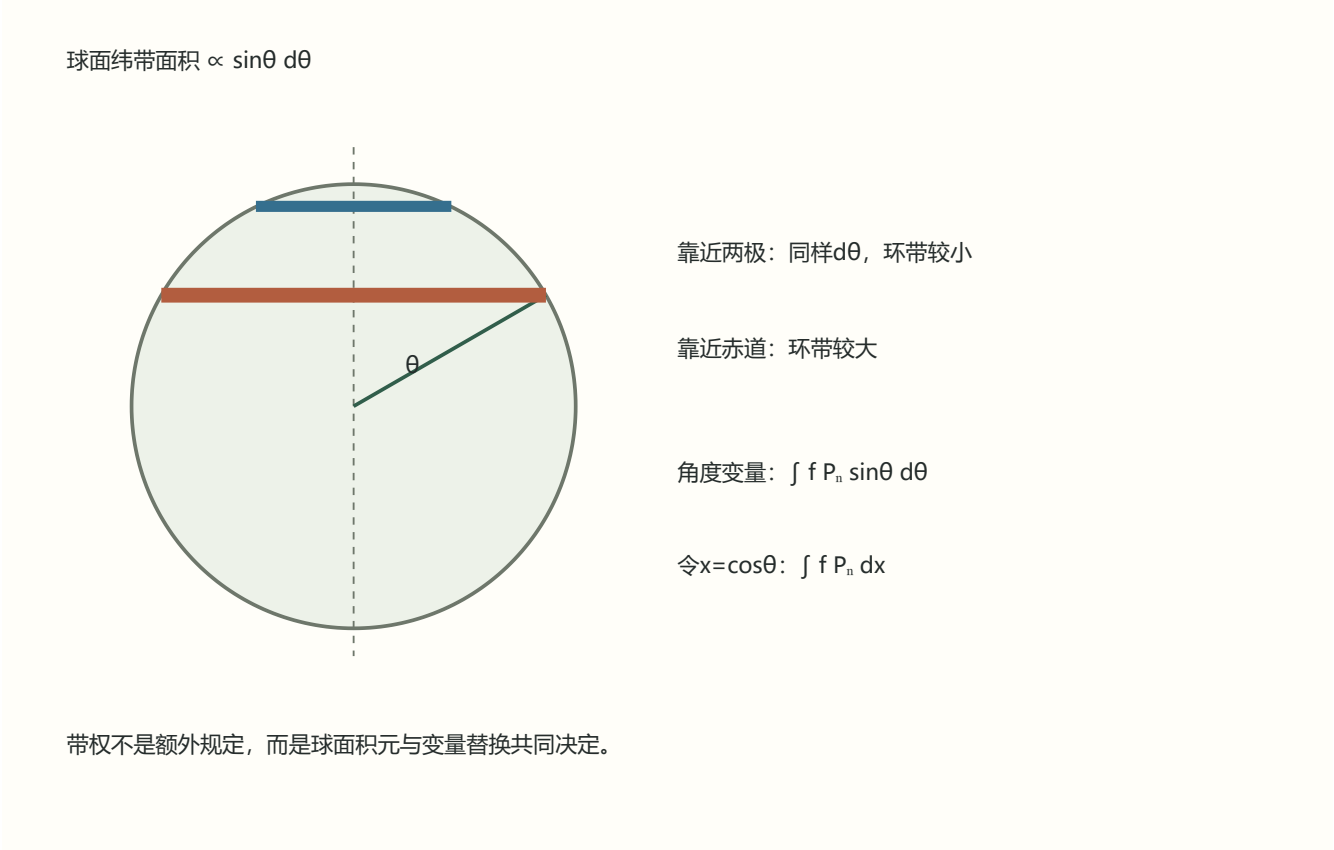
$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(x), \qquad c_n = \frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)P_n(x)dx.$$

如果变量为球面角度，则

$$c_n = \frac{2n+1}{2}\int_{0}^{\pi} f(\theta)P_n(\cos\theta)\sin\theta\, d\theta.$$

漏掉$\sin\theta$会改变内积和系数。 函数值只是$P_n(\cos\theta)$，并不意味着权也自动变成1。

图 P3-18 球面环带面积带来sinθ，换成x后权变为1



圆形示意球的经线剖面，粗横带表示纬带的位置；完整面积还包含绕轴的2π因子。

3.9 · 教材299—302页

35 多项式展开：比较系数通常比积分省力

由$P_2=(3x^2-1)/2$，立刻有$x^2=P_0/3+2P_2/3$。同样

$$x^3=\frac{3}{5}P_1+\frac{2}{5}P_3,\qquad x^4=\frac{1}{5}P_0+\frac{4}{7}P_2+\frac{8}{35}P_4.$$

这是有限展开，精确成立。偶次只留偶阶、最高阶不超过多项式次数，先利用这两点就能大幅减少待定系数。

需要积分投影时当然也可用通式；两种路线应得到相同结果，可互相校验。不是所有题都必须把最通用的方法完整写一遍。

3.9 · 教材299—302页

36 阶跃和绝对值：无穷展开时说明在哪里收敛

原书例1对$f(x)=0$（$x<c$）、$f(x)=1$（$x>c$）展开，$-1<c<1$。由系数公式与原函数得

$$c_0=\frac{1-c}{2},\qquad c_n=\frac{1}{2}[P_{n-1}(c)-P_{n+1}(c)]\quad(n\ge 1).$$

在$x=c$恢复跳跃平均$1/2$；并非两侧任意指定的单点值。对于适当分段光滑数据，内部连续点恢复原函数；不加条件地宣称处处一致收敛是不对的。

$|x|$是偶函数，只有偶阶。可用$c_{2k}=(4k+1)\int_0^1 xP_{2k}dx$，前几项为$\frac{1}{2}P_0+\frac{5}{8}P_2-\frac{3}{16}P_4+\cdots$。它在$x=0$虽连续但导数跳跃，展开仍有用。

数学物理方程篇·第三章 / 3.10

球内球外与半球边值问题

教材293—304页相关应用

3.10 · 教材293—304页相关应用

37 角谱确定后，径向只剩欧拉方程

令$\lambda=n(n+1)$，径向为$(r^2R')'-n(n+1)R=0$，试$R=r^s$得$s(s+1)=n(n+1)$，故$s=n$或$-n-1$。

轴对称调和展开为

$$u(r,\theta)=\sum_{n\ge 0}(A_nr^n+B_nr^{-n-1})P_n(\cos\theta).$$

球内包含原点且有界：删全部负幂。球外要求无穷远趋零：删全部正幂及常数项，保留r^{-n-1}。球壳两端都有正半径，通常两种幂均保留。

图 P3-19 球内保留r的正幂，球外趋零保留负n减一幂

同一角模态$P_n(\cos\theta)$，径向保留项由区域决定

球内：r<R，原点有界

允许r^n，删r^{-n-1}

归一因子：$(r/R)^n$

第0阶保持常数

中心值由球面平均决定

球外：r>R，无穷远趋零

允许r^{-n-1}，删r^n

归一因子：$(R/r)^{n+1}$

第0阶也按1/r衰减

远处条件是唯一性的必要数据

球壳a<r<b不含原点，r^n与r^{-n-1}通常都要保留。

不要把二维圆域的r^{-n}、ln r套进三维球的径向方程。

球内和圆内的径向方程不同；球外的常数角模态仍有1/r径向因子。

3.10 · 教材293—304页相关应用

38 球内与球外的同一边界：径向因子差在哪里

球面$r=R$给$f(\theta)=\sum c_nP_n(\cos\theta)$。球内有界解

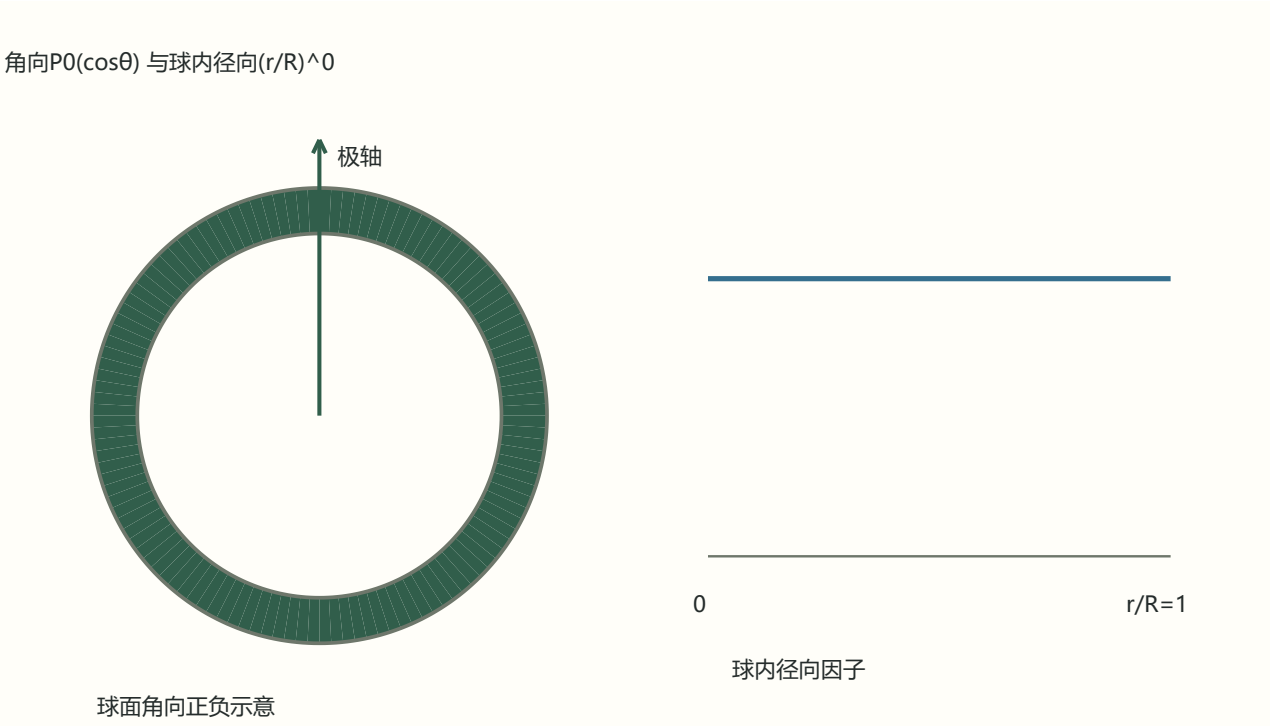
$$u_{\text{in}}=\sum_{n\ge 0}c_n(r/R)^nP_n(\cos\theta).$$

球外趋零解

$$u_{\text{out}}=\sum_{n\ge 0}c_n(R/r)^{n+1}P_n(\cos\theta).$$

例如$f=\cos^2\theta=\frac{1}{3}P_0+\frac{2}{3}P_2$，球内是$1/3+(2/3)(r/R)^2P_2$，球外是$R/(3r)+(2/3)(R/r)^3P_2$。球外的零阶项也会按$1/r$衰减，不能误保留为常数。

图 P3-20 球面角向模态与球内径向因子各自负责一部分



图示 第0阶P0；阶数n=0；球面角向由P0描述，球内越高阶的扰动在靠近中心时越弱。

3.10 · 教材293—304页相关应用

39 半球赤道：零温挑奇阶，绝热挑偶阶

上半球$0 \le \theta \le \pi/2$，令$x = \cos\theta \in [0,1]$。底面在$\theta = \pi/2$：零温要求$P_n(0) = 0$，挑奇阶；底面绝热要求$\partial_\theta P_n(\cos\theta)|_{\pi/2} = 0$，即$P_n'(0) = 0$，挑偶阶。

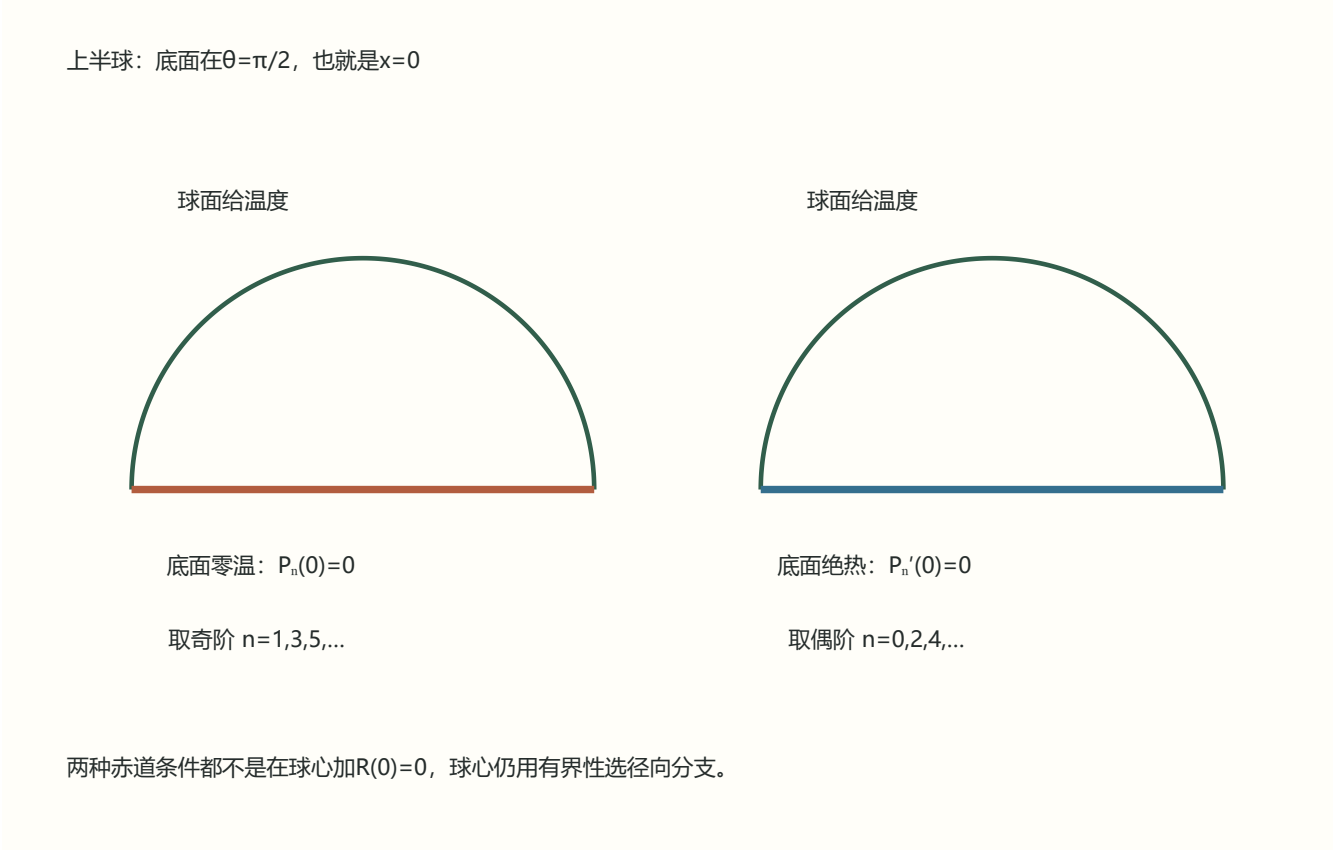
对零温底面、球面恒温U_0，把半区间常数作奇延拓，相当于球面数据$U_0 \operatorname{sgn} x$。系数只在奇阶出现：

$$c_n = U_0[P_{n-1}(0) - P_{n+1}(0)] \quad (n\text{为奇数}),$$

$$u = \sum_{n\text{为奇数}} c_n (r/R)^n P_n(\cos\theta).$$

例如前两项系数$3U_0/2, -7U_0/8$。球面与底面交圈存在温度冲突，应分别理解边界内部极限。若底面绝热而球面恒温，常数$u = U_0$直接满足全部条件，无需无穷级数。

图 P3-21 赤道零值取奇阶，赤道零导数取偶阶



如果球面恒温且底面绝热，常数解已经满足全部数据，无需求和。

3.10 · 教材293—304页相关应用

40 半空心球：先减去底面温度，再联立径向系数

原书习题29：内半径$R/2$、外半径R的上半球壳，内外球面温度均为$A\sin^2(\theta/2)=A(1-\cos\theta)/2$，底面$A/2$。令$w=u-A/2$，底面零，球面数据变成$-A\cos\theta/2=-AP_1/2$。

只需一个角模态，设$w=(Cr+Dr^{-2})\cos\theta$。两球面给$CR+D/R^2=-A/2$、$CR/2+4D/R^2=-A/2$。解出

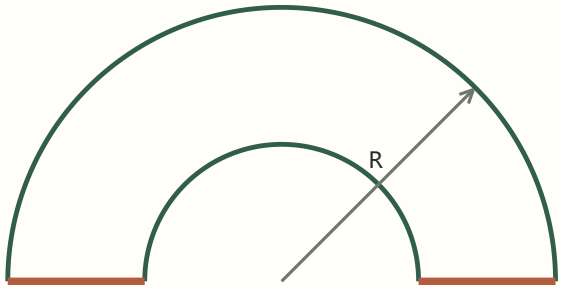
$$C=-\frac{3A}{7R},\qquad D=-\frac{AR^2}{14},$$

$$u(r,\theta)=\frac{A}{2}-\left(\frac{3Ar}{7R}+\frac{AR^2}{14r^2}\right)\cos\theta.$$

这是“提升＋奇偶选择＋球壳双径向分支”的综合题。先辨认只含P_1，比从无穷级数开始求全部系数快得多。

图 P3-22 半空心球减去底面常数后只剩P1模态

外半径R，内半径R/2的上半球壳



内外球面：A(1-cosθ)/2

底面：A/2

先减A/2，只剩P_1

w=(Cr+Dr⁻²)cosθ；两个球面条件联立确定C、D。

内球面也是边界，原点已经挖去；负幂分支在球壳内合法。

图为经线半剖面；内球面半径R/2，底面包括两条环形截面线段。

数学物理方程篇·第三章 / 3.11

球内点电荷与镜像法

教材302—305页

3.11 · 教材302—305页

41 原书例3：先把已知点源与导体感应势拆开

半径a的接地导体球壳内，点电荷在轴上距中心b，$0<b<a$。把点电荷势的比例常数吸收入q，源势为q/ρ，$\rho=\sqrt{r^2-2br\cos\theta+b^2}$。总势写为$\Phi=q/\rho+v$；$v$在球内调和，并在$r=a$满足$v=-q/\sqrt{a^2-2ab\cos\theta+b^2}$。

用母函数识别边界：

$$v(a,\theta)=-\frac{q}{a}\sum_{n\geq 0}(b/a)^n P_n(\cos\theta),$$

所以球内调和延拓为$v=-(q/a)\sum(br/a^2)^nP_n(\cos\theta)$。再用母函数求和，得到一个球外镜像电荷的势。

3.11 · 教材302—305页

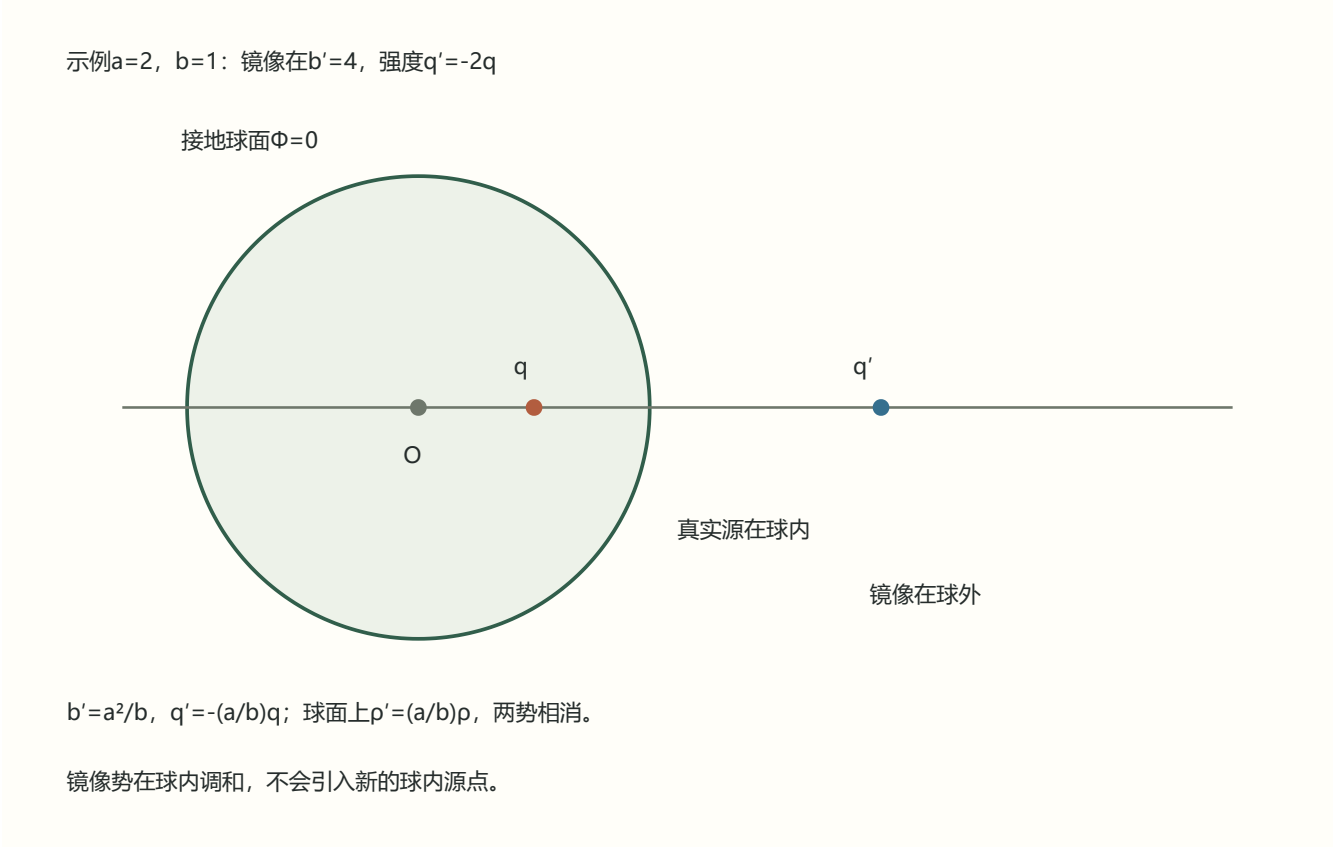
42 镜像点在球外，不是把原有源点移走

镜像位置$b'=a^2/b$、镜像强度$q'=-aq/b$，所以

$$\Phi(r,\theta)=\frac{q}{\sqrt{r^2-2br\cos\theta+b^2}}+\frac{q'}{\sqrt{r^2-2b'r\cos\theta+b'^2}}.$$

在$r=a$，镜像距离等于(a/b)倍源距离，两项恰好抵消。镜像点在球外，因此它的势在球内没有新奇点；真正的源点仍在$r=b,\theta=0$。

图 P3-23 球内真实电荷与球外镜像共同满足接地边界



位置按同一轴线比例示意；这里势的公共比例常数已吸收到q，SI单位另乘1/(4πε)。

做题用途： 母函数把边界距离表达式变成可延拓的勒让德系数，再识别成一个简单势。第一轮掌握位置、强度及边界验证；不必把感应电荷面密度的进一步计算当作本章必会内容。若用SI单位，恢复$1/(4\pi\varepsilon)$的公共因子。

数学物理方程篇·第三章 / 3.12

原书二十九题的路线与关键结果

教材305—309页

3.12 · 教材305—309页

43 习题1—5：识别方程母函数与半整数阶

题1 柱坐标拉普拉斯分离：$\Phi''+m^2\Phi=0$，$Z''-k^2Z=0$，$r^2R''+rR'+(k^2r^2-m^2)R=0$；分离常数的符号可以另选，但三式必须互相一致。

题2 链式法则：$(J_0(ax))'=-aJ_1(ax)$；$[xJ_1(ax)]'=axJ_0(ax)$。

题3 将$J_0(x\cos\theta)$级数逐项积分，配合$\int_0^{\pi/2}\cos^{2j+1}\theta d\theta=2^{2j}(j!)^2/(2j+1)!$，得到$\int_0^{\pi/2}J_0(x\cos\theta)\cos\theta d\theta=\sin x/x$，$x=0$取极限1。

题4 令$y=\sqrt{x}\,J_{3/2}(x)$，由上一节换元方程得到$x^2y''+(x^2-2)y=0$；也可用$J_{3/2}=\sqrt{2/(\pi x)}(\sin x/x-\cos x)$直接验算。

题5 三条求和恒等式分别在正文3.2的母函数三角展开中取$\theta=0$或$\pi/2$。

3.12 · 教材305—309页

44 习题6—11：递推导数与积分的六组练习

题6(1) 由$J_0'=-J_1$和$J_2=2J_1/x-J_0$，结合J_0方程得$J_2=J_0''-J_0'/x$。(2) 用相邻阶递推将J_0'''改写为$(3J_1-J_3)/4$，再用$J_0'=-J_1$，即得$J_3+3J_0'+4J_0'''=0$。

题7(1) $\nu\neq0$时，用$(J_{\nu-1}+J_{\nu+1})(J_{\nu-1}-J_{\nu+1})$得$(J_\nu^2)'=x(J_{\nu-1}^2-J_{\nu+1}^2)/(2\nu)$。(2) 乘积求导得$[xJ_0J_1]'=x(J_0^2-J_1^2)$。

题8 对整数$n\geq2$，两次分部积分得

$$\int_0^x t^nJ_0(t)dt=x^nJ_1(x)+(n-1)x^{n-1}J_0(x)-(n-1)^2\int_0^x t^{n-2}J_0(t)dt.$$

特别$\int_0^x t^3J_0dt=x^3J_1-2x^2J_2$；再分部积分得$\int_0^x t^4J_1dt=x^4J_2-2x^3J_3$。写下限为零时应检查乘积在零处的极限，别把所有幂次都不加限制套用。

题9 $\int J_3dx=-J_0-2J_2+C$，对右侧求导验证最直接。题10(1) 用$J_2=2J_1/x-J_0$、$J_1=-J_0'$得到题中x^2J_2积分关系；(2) 分部积分得$\int_0^x tJ_1dt=-xJ_0(x)+\int_0^x J_0dt$。

题11 直接求导检查两个原函数：$\int J_0\sin x\,dx=xJ_0\sin x-xJ_1\cos x+C$；$\int J_0\cos x\,dx=xJ_0\cos x+xJ_1\sin x+C$。不是所有$\int J_0$都能用初等函数表示，保留积分本身也可能是合理结果。

3.12 · 教材305—309页

45 习题12—15：展开系数与Parseval

题12 区间$(0,2)$，$J_0(2\omega_n)=0$，阶跃$f=1$于$(0,1)$、$f=0$于$(1,2)$。D模平方$N_n=2J_1(2\omega_n)^2$，分子$\int_0^1 rJ_0(\omega_n r)dr=J_1(\omega_n)/\omega_n$，所以$c_n=J_1(\omega_n)/[2\omega_n J_1(2\omega_n)^2]$。跳跃点取$1/2$。

题13 区间$(0,1)$、$J_1(\omega_n)=0$，展开$f=r$于$J_1(\omega_n r)$。分子$\int_0^1 r^2J_1(\omega_n r)dr=J_2(\omega_n)/\omega_n$，分母$J_2(\omega_n)^2/2$，故$c_n=2/[\omega_n J_2(\omega_n)]$。注意这里是**阶数1的D问题**，不是阶数0的N问题，虽然两者用到同一串J_1正根。

题14 带权Parseval：若$f=\sum A_nJ_0(\omega_n r)$、$J_0(\omega_n)=0$，则$\int_0^1 rf^2dr=\frac12\sum A_n^2J_1(\omega_n)^2$，从正交投影及适当收敛得到。

题15 将常数展开$c_n=2/[\omega_nJ_1(\omega_n)]$代入Parseval：左侧$1/2$，右侧$2\sum 1/\omega_n^2$，故$\sum 1/\omega_n^2=1/4$。常数在外端不满足D边界，但可在带权平方积分及内部逐点意义使用；不能声称在$r=1$也等于1。

3.12 · 教材305—309页

46 习题16—19：圆柱圆膜及阻尼的应用

题16 无限长圆柱侧面恒温u_0、初温零：利用对称性归为径向热传导，答案见正文3.6的$U_b=u_0$公式。

题17 半圆膜直径和圆弧均固定：角向$\sin m\phi, m\ge1$，径向$J_m(j_{m,n}r/R)$，角频率$aj_{m,n}/R$，$n\ge1$；不含$m=0$。

题18(1) 侧面零温、底零、顶恒温T_0：用正文3.5的J_0正根和双曲正弦公式。

题18(2) 径向阻尼波$u_{tt}+2hu_t=a^2(u_{rr}+u_r/r)$、外圆零导数。包括常数零模态；初速度零时该模态保持初位移的径向平均。正模态用$J_0(k_nr)$、$J_1(k_nl)=0$。若$a^2k_n^2>h^2$，时间因子$e^{-ht}[\cos\beta_nt+(h/\beta_n)\sin\beta_nt]$，$\beta_n=\sqrt{a^2k_n^2-h^2}$；相等取$e^{-ht}(1+ht)$，小于则用双曲函数。题中“$h$很小”不能代替逐个检查与最低正频率的比较。

题19 侧面散热、底零、顶$f(r)$：根$-kJ_1(kR)+hJ_0(kR)=0$，按Robin模平方投影，轴向$\sinh(kz)/\sinh(kH)$。原题外换热系数可另记，避免与圆柱高度同字母混淆。

3.12 · 教材305—309页

47 习题20—23：勒让德在零点的值与积分

题20 对$k\ge0$，

$$P_{2k}(0)=(-1)^k\frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2},\quad P_{2k+1}(0)=0,$$

$$P'_{2k}(0)=0,\quad P'_{2k+1}(0)=(-1)^k\frac{(2k+1)!}{2^{2k}(k!)^2}.$$

由显式多项式的常数项、一次项读取，或用递推生成。

题21 反复使用$P'_n-P'_{n-2}=(2n-1)P_{n-1}$，望远镜相消，得到
$P'_n=(2n-1)P_{n-1}+(2n-5)P_{n-3}+\cdots$。

题22(1) 对非负整数m,n，若$m<n$或$m+n$为奇数，积分为零；否则

$$\int_{-1}^{1}x^mP_n(x)dx=\frac{2m!}{(m-n)!!(m+n+1)!!}.$$

约定$0!!=(-1)!!=1$。(2) 用$xP_n=[(n+1)P_{n+1}+nP_{n-1}]/(2n+1)$后正交投影：仅$m=n\pm1$可能非零；对应值$2(n+1)/[(2n+1)(2n+3)]$和$2n/[(2n+1)(2n-1)]$。

题23 勒让德方程乘P_n再分部积分，端点$(1-x^2)$使边界项为零，得到
$\int_{-1}^{1}(1-x^2)(P'_n)^2dx=2n(n+1)/(2n+1)$。

3.12 · 教材305—309页

48 习题24—29：展开球内外与半球综合题

题24(1)(2) x^3,x^4的有限展开见正文3.9；(3) $|x|$用偶阶投影，可保留系数积分，前几项也见正文。

题25 球面$\cos^2\theta$，球内$u=1/3+(2/3)(r/a)^2P_2(\cos\theta)$。题26 单位球边界
$3\cos2\theta+1=6\cos^2\theta-2=4P_2(\cos\theta)$，故$u=4r^2P_2(\cos\theta)$。

题27 单位球外边界$\cos^2\theta$，若要求无穷远趋零，$u=1/(3r)+2P_2(\cos\theta)/(3r^3)$。原题若没有写远处条件，外域问题还需补足这一条件才唯一；这里只给通常的衰减解。

题28(1) 半球底面零温：只取奇阶，球面常数的半区间展开见正文3.10。(2) 底面绝热：$u=u_0$是解，结合唯一性即可。

题29 半空心球内外面给$A\sin^2(\theta/2)$、底面$A/2$：正文3.10已完整求得只含常数和P_1的闭式解。这里球壳内半径是$R/2$，不要把“厚度$R/2$”误读成内半径为零。

数学物理方程篇·第三章 / 3.13

全章选择表与掌握要求

全章272—309页

3.13 · 全章272—309页

49 先认区域边界，再选函数与权

问题	允许空间函数	投影与根的关键
实心圆盘固定圆周	$J_m(j_{m,n}r/R)$配角三角函数	径向权r，D模平方
轴对称圆柱侧面绝热	常数及$J_0(k_nr)$	$J_1(k_nR)=0$，零模态另算
圆柱侧面换热	$J_0(k_nr)$	$-k_nJ_1+hJ_0=0$，Robin模平方
空心圆柱或圆环	通常AJ_m+BY_m	不能因原点奇异而删区域外分支
轴对称完整球面	$P_n(\cos\theta)$	权$\sin\theta$或换x后权1
球内有界	r^nP_n	删r^{-n-1}
球外趋零	$r^{-n-1}P_n$	零阶也按$1/r$衰减
半球底面零温 / 绝热	奇阶 / 偶阶P_n	用赤道值或导数筛选

图 P3-24 全章解题选择：函数、根、权和径向分支



母函数和递推提供计算工具，最终答案仍必须回到原来的方程与定解条件验证。

3.13 · 全章272—309页

50 学到什么程度可以继续下一章

能独立完成练习1—12，就会贝塞尔基本计算、选根与展开；13—18检查圆柱圆盘应用；19—28检查勒让德与球面问题；29—32用于综合查漏。每题先写区域、边界、函数基、权，再求系数。

母函数和级数证明至少看懂它们产生哪些公式。第一轮可以暂缓：一般复阶的分支分析、渐近展开的严格误差证明、任意奇异端点的谱论。不能暂缓：原点删项、零模态、导数链式因子、正确权与模平方、球外的远处条件。

标准记号与公式另参照NIST DLMF贝塞尔定义、递推与导数、积分与正交、勒让德正交积分。这些链接用于查证，阅读本讲义不依赖联网。

数学物理方程篇·第三章 / 3.14

三十二道自编检查题与完整解析

独立编号不对应原书题号

3.14 · 独立编号不对应原书题号 · 自编检查题

练习1 把缩放后的方程认出来

求$r^2R''+rR'+(9r^2-4)R=0$在$r>0$的一般解；若包含原点且要求有界，保留什么？

展开解析

阶数2，波数3，$R=AJ_2(3r)+BY_2(3r)$。Y_2在原点发散，实心区域有界时$B=0$。不是$J_3(2r)$，阶数来自常数项$4=2^2$，缩放来自$9r^2$。

3.14 · 独立编号不对应原书题号 · 自编检查题

练习2 J0和J1的前几项

由级数写出$J_0(x)$至x^4、$J_1(x)$至x^5，并判断它们在原点的值。

展开解析

$J_0=1-x^2/4+x^4/64+O(x^6)$，$J_1=x/2-x^3/16+x^5/384+O(x^7)$。因此$J_0(0)=1$、$J_1(0)=0$。对$J_0$求导得$-x/2+x^3/16-\cdots=-J_1$，可交叉检查。

3.14 · 独立编号不对应原书题号 · 自编检查题

练习3 Γ函数只算需要的值

计算$\Gamma(7/2)$和$\Gamma(-3/2)$。

展开解析

$\Gamma(7/2)=(5/2)(3/2)(1/2)\sqrt{\pi}=15\sqrt{\pi}/8$；由$\Gamma(-1/2)=(-3/2)\Gamma(-3/2)=-2\sqrt{\pi}$，得$\Gamma(-3/2)=4\sqrt{\pi}/3$。负非整数处可以有限，非正整数处才是本章提到的极点。

3.14 · 独立编号不对应原书题号 · 自编检查题

练习4 求导不要漏链式因子

计算$[J_0(5r)]'$和$[rJ_1(5r)]'$。

展开解析

分别为$-5J_1(5r)$、$5rJ_0(5r)$。第二个式子也可先令$x=5r$，写$rJ_1(5r)=xJ_1(x)/5$再求导。撇号$J_1'(5r)$是对完整自变量求导，外层仍有5。

3.14 · 独立编号不对应原书题号 · 自编检查题

练习5 一个常见径向积分

计算$\int_0^R rJ_0(kr)dr$，$k>0$。

展开解析

由$[rJ_1(kr)]'=krJ_0(kr)$，积分为$RJ_1(kR)/k$。下端$rJ_1(kr)\sim kr^2/2\to 0$。若$k=0$，直接算$R^2/2$，也等于所得表达的极限。

3.14 · 独立编号不对应原书题号 · 自编检查题

练习6 用递推积分再验证

求$\int x^3J_0(x)dx$。

展开解析

写$x^3J_0dx=x^2d(xJ_1)$，得到$x^3J_1-2\int x^2J_1dx=x^3J_1-2x^2J_2+C$。对答案求导：第一项给$x^3J_0+2x^2J_1$，第二项给$-2x^2J_1$，余下正是被积函数。

3.14 · 独立编号不对应原书题号 · 自编检查题

练习7 根波数特征值和频率

半径$R=2$圆膜、波速$a=3$，轴对称最低固定边缘模态是什么？给出波数、空间特征值和角频率。

展开解析

$X=J_0(j_{0,1}r/2)$，$j_{0,1}\approx 2.404825558$。波数$k=j_{0,1}/2\approx 1.202412779$，特征值$k^2\approx 1.445796491$，角频率$\omega=3k\approx 3.607238337$。阶数是0，径向编号是1，不能把四种量都写成2.4048。

3.14 · 独立编号不对应原书题号 · 自编检查题

练习8 原点零值不自动给零特征值

为什么$J_1(0)=0$不能证明圆盘固定边缘的$m=1$问题存在$k=0$模态?

展开解析

把$k=0$放进$J_1(kr)$得到恒零函数，不能作特征函数。应回到径向方程$r^2R''+rR'-R=0$，有界解$R=Cr$，外圆$R(R_0)=0$迫使$C=0$。因此无非零零模态。

3.14 · 独立编号不对应原书题号 · 自编检查题

练习9 D边界模平方

单位圆中$\alpha_n=j_{0,n}$，求$X_n=J_0(\alpha_n r)$的权和模平方。

展开解析

权为r，$N_n=\int_0^1 rJ_0(\alpha_n r)^2dr=J_1(\alpha_n)^2/2$。系数分母是这个积分本身，不能写成$J_1^4/4$。函数$X_n$在原点为1，不与D边界冲突，因为D条件在$r=1$。

3.14 · 独立编号不对应原书题号 · 自编检查题

练习10 常数的贝塞尔展开

把$f(r)=1$在$(0,1)$按$J_0(\alpha_n r)$展开，$J_0(\alpha_n)=0$；说明$r=1$处的限制。

展开解析

分子$J_1(\alpha_n)/\alpha_n$，分母$J_1(\alpha_n)^2/2$，故$c_n=2/[\alpha_n J_1(\alpha_n)]$。内部适当意义下$1=\sum c_n J_0(\alpha_n r)$。在$r=1$每项为零，因此不可能恢复端点值1；可用内部逐点或带权L^2展开解释。

3.14 · 独立编号不对应原书题号 · 自编检查题

练习11 抛物线径向数据

把$f(r)=1-r^2$在单位圆的D径向基上展开。

展开解析

先算$\int_0^1 r(1-r^2)J_0(\alpha_n r)dr=2J_2(\alpha_n)/\alpha_n^2=4J_1(\alpha_n)/\alpha_n^3$。除以模平方得到$c_n=8/[\alpha_n^3 J_1(\alpha_n)]$。于是$f=\sum c_n J_0(\alpha_n r)$，外端也与零边界相容。

3.14 · 独立编号不对应原书题号 · 自编检查题

练习12 Robin边界写对因子

半径R、$X=J_0(kr)$，边界$X'(R)+hX(R)=0$。写根方程和模平方，$h>0$。

展开解析

根方程$-kJ_1(kR)+hJ_0(kR)=0$。令$z=kR$，等价$-zJ_1(z)+hRJ_0(z)=0$。
$N=(R^2/2)[1+(hR/z)^2]J_0(z)^2$。$h>0$时常数不能满足Robin边界，所以没有常数零模态。

3.14 · 独立编号不对应原书题号 · 自编检查题

练习13 绝热圆盘的平均温度

圆盘$0<r<R$轴对称热传导，圆周绝热，初温$f(r)=r^2$。长期温度是多少?

展开解析

常数模态系数$\bar f = 2R^{-2}\int_0^R r^3 dr = R^2/2$。正模态均衰减，长期趋$R^2/2$。它是面积平均，不是区间普通平均$R^2/3$。守恒量为$2\pi\int_0^R ru\,dr$。

3.14 · 独立编号不对应原书题号 · 自编检查题

练习14 单个圆盘热模态

单位圆圆周零温，$u_t=2\Delta u$，初温$J_0(j_{0,1}r)$，求解。

展开解析

$u=e^{-2j_{0,1}^2 t}J_0(j_{0,1}r)$。径向拉普拉斯作用于该函数等于$-j_{0,1}^2$倍自身，故时间因子是指数衰减。其原点温度等于该指数，圆周恒零。

3.14 · 独立编号不对应原书题号 · 自编检查题

练习15 单个圆膜初速度

单位圆膜波速1，边缘固定，初位移零，初速度$3J_1(j_{1,1}r)\cos\phi$，求解。

展开解析

$u=3\sin(j_{1,1}t)J_1(j_{1,1}r)\cos\phi/j_{1,1}$。初速度要除以角频率$j_{1,1}$，空间阶数由$\cos\phi$确定为1，不得改成$J_0$。

3.14 · 独立编号不对应原书题号 · 自编检查题

练习16 半圆膜能否用m等于零

半圆膜直径和圆弧均固定，说明允许的角函数和最低模态频率。

展开解析

$0<\phi<\pi$两边零值给$\sin m\phi$、$m\geq 1$。$m=0$的正弦恒零，轴对称常数角函数也不满足直径零位移。最低模态为$m=1,n=1$，角频率$aj_{1,1}/R$，不是$aj_{0,1}/R$。

3.14 · 独立编号不对应原书题号 · 自编检查题

练习17 圆柱端面只激发一个径向模态

半径1、高H圆柱稳态调和，侧面及底面零温，顶面$TJ_0(j_{0,2}r)$，求解。

展开解析

$u=T\sinh(j_{0,2}z)J_0(j_{0,2}r)/\sinh(j_{0,2}H)$。顶面已经是一个径向特征函数，不必做积分。径向拉普拉斯给负特征值，z二阶导数给正特征值，两项相消。

3.14 · 独立编号不对应原书题号 · 自编检查题

练习18 绝热侧面的常数模态

圆柱侧面绝热，底面恒温2、顶面恒温5，高H，求轴对称稳态。

展开解析

只激发径向常数模态，$u=2+3z/H$。径向导数恒零，$u_{zz}=0$，两端数据匹配。不需要贝塞尔正根求和；若从仅含正根的式子出发，就会漏掉这个解。

3.14 · 独立编号不对应原书题号 · 自编检查题

练习19 用递推生成P3

由$P_0=1, P_1=x$，用三项递推求P_2, P_3。

展开解析

$2P_2 = 3xP_1 - P_0 = 3x^2-1$。再$3P_3 = 5xP_2 - 2P_1 = (15x^3-9x)/2$，所以$P_3 = (5x^3-3x)/2$。两者分别是偶、奇多项式，且在1处均为1。

3.14 · 独立编号不对应原书题号 · 自编检查题

练习20 球面投影的权

将$f(\theta)=\cos^2\theta$按$P_n(\cos\theta)$展开，写出系数积分和结果。

展开解析

$c_n = (2n+1)\int_0^{\pi}\cos^2\theta P_n(\cos\theta)\sin\theta d\theta/2$。令$x=\cos\theta$，由$x^2 = P_0/3 + 2P_2/3$，仅$c_0=1/3, c_2=2/3$非零。没有$\sin\theta$的角积分会给错误系数。

3.14 · 独立编号不对应原书题号 · 自编检查题

练习21 一个多项式的有限展开

把$f(x)=2x^3-x$写成勒让德多项式的线性组合。

展开解析

$x^3 = 3P_1/5 + 2P_3/5$，因此$2x^3 - x = P_1/5 + 4P_3/5$。奇函数只含奇阶，次数3只需到$P_3$。在$x=1$检验：右侧$1/5+4/5=1$，与原式相同。

3.14 · 独立编号不对应原书题号 · 自编检查题

练习22 计算一个正交投影积分

求$\int_{-1}^{1} x^2 P_2(x)\,dx$和$\int_{-1}^{1} x P_2(x)\,dx$。

展开解析

由$x^2 = P_0/3 + 2P_2/3$，第一式$= (2/3)\int P_2^2 = (2/3)(2/5) = 4/15$。第二式被积函数为奇函数，积分零。直接代多项式也可验证。

3.14 · 独立编号不对应原书题号 · 自编检查题

练习23 勒让德方程给能量积分

求$\int_{-1}^{1} (1-x^2)[P_3'(x)]^2\,dx$。

展开解析

由自伴方程$-[(1-x^2)P_3']' = 12P_3$，乘P_3积分，边界项零，结果$12\int P_3^2 = 12\cdot 2/7 = 24/7$。不用把四次多项式全部展开再积分。

3.14 · 独立编号不对应原书题号 · 自编检查题

练习24 球内调和延拓

半径2球面给$u(2,\theta) = 2 + 3\cos\theta - \cos^2\theta$，求球内有界轴对称调和解。

展开解析

边界展开为$(5/3)P_0 + 3P_1 - (2/3)P_2$，所以$u = 5/3 + (3r/2)\cos\theta - (2/3)(r/2)^2 P_2(\cos\theta)$。中心值为$5/3$，是球面平均，而非对角度作无权平均。

3.14 · 独立编号不对应原书题号 · 自编检查题

练习25 球外必须说明无穷远条件

单位球面$u = 1 + 2\cos\theta$，求无穷远趋零的外域调和解。

展开解析

$u = r^{-1} + 2r^{-2}\cos\theta$。第0阶径向衰减是$r^{-1}$，第1阶是$r^{-2}$。若未给远处条件，还可以考虑其他满足边界零的调和修正，唯一性不能直接宣称。

3.14 · 独立编号不对应原书题号 · 自编检查题

练习26 半球底面选择奇偶阶

上半球底面分别是零温和绝热，角向$P_n(\cos\theta)$各允许哪些阶?

展开解析

赤道$\theta = \pi/2$对应$x = 0$。零温要求$P_n(0) = 0$，取奇阶。绝热在底面法向为轴向方向，赤道处$u_z = -u_\theta/r$，零通量等价$u_\theta = 0$，即$P_n'(0) = 0$，取偶阶，包含$n = 0$常数。

3.14 · 独立编号不对应原书题号 · 自编检查题

练习27 阶跃的首几个系数

$f(x) = 1$于$0 < x < 1$、$f(x) = 0$于$-1 < x < 0$，求勒让德系数c_0, c_1, c_2, c_3及跳跃处值。

展开解析

$c_0 = 1/2$，$c_n = [P_{n-1}(0) - P_{n+1}(0)]/2$。故$c_1 = 3/4, c_2 = 0, c_3 = -7/16$。跳跃点$x = 0$收敛到$1/2$。除常数外仅有奇阶，因为$f - 1/2$是奇函数。

3.14 · 独立编号不对应原书题号 · 自编检查题

练习28 球壳双径向分支

在$1<r<2$求轴对称调和函数，内面零，外面$P_1(\cos\theta)$。

展开解析

只需$u=(Cr+Dr^{-2})P_1$。内面$C+D=0$，外面$2C+D/4=1$，得$C=4/7, D=-4/7$，所以$u=(4/7)(r-r^{-2})\cos\theta$。区域不含原点，$r^{-2}$不应删。

3.14 · 独立编号不对应原书题号 · 自编检查题

练习29 镜像位置与边界验证

半径$a=2$接地球内，源强$q=3$在轴上$b=1$处。求镜像位置、强度，并在球面验证相消。

展开解析

$b'=a^2/b=4$，$q'=-aq/b=-6$。在$r=2$有$\rho'=2\rho$，所以源势与镜像势相加$3/\rho-6/(2\rho)=0$。镜像位于球外；总势在球内只有原源点的奇异性。

3.14 · 独立编号不对应原书题号 · 自编检查题

练习30 半空心球的单模态提升

外半径1、内半径$1/2$上半球壳，内外球面$A\sin^2(\theta/2)$、底面$A/2$，求解。

展开解析

减去$A/2$后，球面是$-A\cos\theta/2$，底面零，只需P_1。由两球面联立得$C=-3A/7, D=-A/14$，因此$u=A/2-A(3r/7+1/(14r^2))\cos\theta$。$r=1$与$r=1/2$时括号均为$1/2$，底面余项为零。

3.14 · 独立编号不对应原书题号 · 自编检查题

练习31 常数展开推出零点求和

由$1=\sum 2J_0(\alpha_n r)/[\alpha_n J_1(\alpha_n)]$，$J_0(\alpha_n)=0$，用带权Parseval求$\sum 1/\alpha_n^2$。

展开解析

左侧模平方$\int_0^1 r dr=1/2$。右侧为$\sum[4/(\alpha_n^2 J_1^2)](J_1^2/2)=2\sum 1/\alpha_n^2$。所以总和$1/4$。这里用平方积分展开，不要求不相容的外端值也逐点恢复。

3.14 · 独立编号不对应原书题号 · 自编检查题

练习32 看出一个答案到底错在哪里

有人写：球内边界$\cos^2\theta$的解为$u=r^2\cos^2\theta/R^2$；另有人写圆柱N边界谱由$J_0(kR)=0$确定。分别指出错误并修正。

展开解析

第一式等于z^2/R^2，三维拉普拉斯为$2/R^2$，不调和。正确解$u=1/3+(2/3)(r/R)^2P_2(\cos\theta)$。第二个把零导数当成零函数值；轴对称N边界应为$J_0'(kR)=0$即$J_1(kR)=0$，并单独保留常数零模态。

来源、编排与掌握要求

依据用户提供的严镇军《数学物理方法》扫描本数学物理方程篇·第三章整理；正文印刷页272—305上部，章末习题305—309。扫描PDF文件页序等于印刷页码加6。按原书节序覆盖各主题，以重新讲解、推导主线和例题说明组织，未逐字复制原文。自编检查题与原书习题分开编号，原书题号可在本章习题路线中查找；本文件不声称是全部原书习题的逐题答案册。

第一轮优先掌握能独立做题所需的概念、步骤和适用条件；背景、证明及拓展均说明用途和暂缓深究的边界。数学物理方程篇·第三章含32道自编检查题及完整解析。公式与SVG内嵌，可离线阅读；屏幕答案默认折叠，打印时自动展开。整理日期：2026年10月22日。