数学物理方法 / 数学物理方程篇

数学物理方程篇·第二章学习讲义

分离变量法

边界筛选空间谱 → 初值投影 → 圆域调和 → 带权展开 → 非齐次模态与提升。按教材顺序展开概念、例题、证明主线与解题条件；每章附原书习题路线和自编检查题。

严镇军教材配套讲读　教材237—271页　28道自编检查题　离线SVG公式与图解

这一章的核心只有一条主线：让边界挑出允许的空间形状，再用初始数据或外力决定每种形状占多少。 你最后需要能自己写出完整解题过程，而不只是认得一条无穷级数。

对应严镇军教材印刷页237—271，扫描PDF第243—277页。按原书2.1有限弦、2.2圆域拉普拉斯、2.3施图姆—刘维尔理论及应用、2.4非齐次问题的顺序讲解；为便于学习拆成十二节。正文237—268页上部，习题268—271页。讲义重新组织语言与推导，不逐字复制教材。

第一轮必须做到：能从齐次边界求特征值；知道正弦、余弦、半整数频率分别从哪里来；把初位移和初速度投影到同一组特征函数；分清波动的振荡与热传导的衰减；圆内解会删掉奇异径向项；非齐次边界先提升，非齐次方程按模态求受迫常微分方程。带权正交、零特征值、共振和收敛条件，是防止套错公式的保障。

推荐三轮：先学2.1—2.3的基本题；再学2.4—2.6理解为什么能这样展开；最后学2.7—2.9处理有源和非齐次边界。2.10给出原书全部12题各小题的路线，2.12另有28道自编检查题及完整解析。两套题分开编号。

学习顺序：先跟着例题写关键步骤，再独立完成检查题，最后按习题路线回到原书。证明段落均说明用途，不要求第一轮逐行背诵。

本章目录

2.1 从边界条件开始分离变量	教材237—239页
2.2 用初始数据确定有限弦的运动	教材239—242页
2.3 圆域中的拉普拉斯方程	教材242—245页
2.4 施图姆—刘维尔理论怎样用于计算	教材245—249页
2.5 正交性零模态与展开条件	教材249—253页
2.6 换热杆与长方体中的应用	教材254—258页
2.7 齐次边界下的非齐次方程	教材259—263页
2.8 非齐次边界怎样化成齐次边界	教材263—265页
2.9 泊松方程与圆环完整例题	教材266—268页
2.10 原书全部习题的路线与关键结果	教材268—271页
2.11 做题顺序公式速查与掌握标准	全章237—271页
2.12 二十八道自编检查题与完整解析	独立编号不对应原书题号

数学物理方程篇·第二章 / 2.1

从边界条件开始分离变量

教材237—239页

2.1 · 教材237—239页

01 把长推导拆成五个必须完成的任务

面对$u_{tt}=a^2u_{xx}$或$u_t=\kappa u_{xx}$，别先背最后答案。按下面五步写：①检查并齐次化边界；②设乘积解；③解空间特征值问题；④叠加允许的模态；⑤代入初始条件求系数。最后把方程、边界、初值逐项检查。

“分离”只产生特殊解；“叠加＋展开”才让它适应一般初始数据。绝大多数初始形状不是一条正弦，所以一个$X(x)T(t)$通常不够。

图 P2-1 先处理边界，再由初值确定各个模态的系数



读图顺序：上排从左向右，下排从右向左；不要越过空间特征值问题直接抄级数。

必须掌握的程度： 看到一道题，先圈出方程、区间、两端边界、初始数据。能判断它属于波动、热传导还是稳态问题，才进入计算。

2.1 · 教材237—239页

02 固定端弦：为什么要先假设乘积

原书2.1研究

$$u_{tt}=a^2u_{xx},\quad 0<x<l,\quad u(t,0)=u(t,l)=0,$$

$$u(0,x)=\varphi(x),\qquad u_t(0,x)=\psi(x).$$

设非零特殊解$u=X(x)T(t)$，代入得到$XT''=a^2X''T$。在能除的地方，

$$\frac{T''}{a^2T}=\frac{X''}{X}=-\lambda.$$

左边只依赖t，右边只依赖x，在乘积区域内恒等，只能都是同一个常数。得到

$$X''+\lambda X=0,\qquad T''+a^2\lambda T=0.$$

负号是方便的约定，不是证明。 换另一种符号也能做，只要后面一致。某些点X,T为零并不意味着乘积法失效；推导后验证所得函数满足原方程，不能把“除以零”当成额外解。

2.1 · 教材237—239页

03 边界只限制空间因子：必须保留非零解

由$X(0)T(t)=X(l)T(t)=0$，若T不是恒零函数，就有$X(0)=X(l)=0$。因此先解

$$\begin{cases}X''+\lambda X=0,\\ X(0)=X(l)=0,\end{cases}\qquad X\not\equiv 0.$$

这叫特征值问题，教材也称固有值问题。允许非零解的λ叫特征值，相应X叫特征函数。$X\equiv 0$对任何λ都成立，但它给出的u恒零，无法筛选参数，所以必须排除。

“边界条件决定特征值”意味着方程和边界一起决定；只看$X''+\lambda X=0$，任何λ都有解，还谈不上离散频谱。

2.1 · 教材237—239页

04 把λ的三种符号算一遍，后面才有资格省略

$\lambda=0$时，$X=A+Bx$，两端为零迫使$A=B=0$。

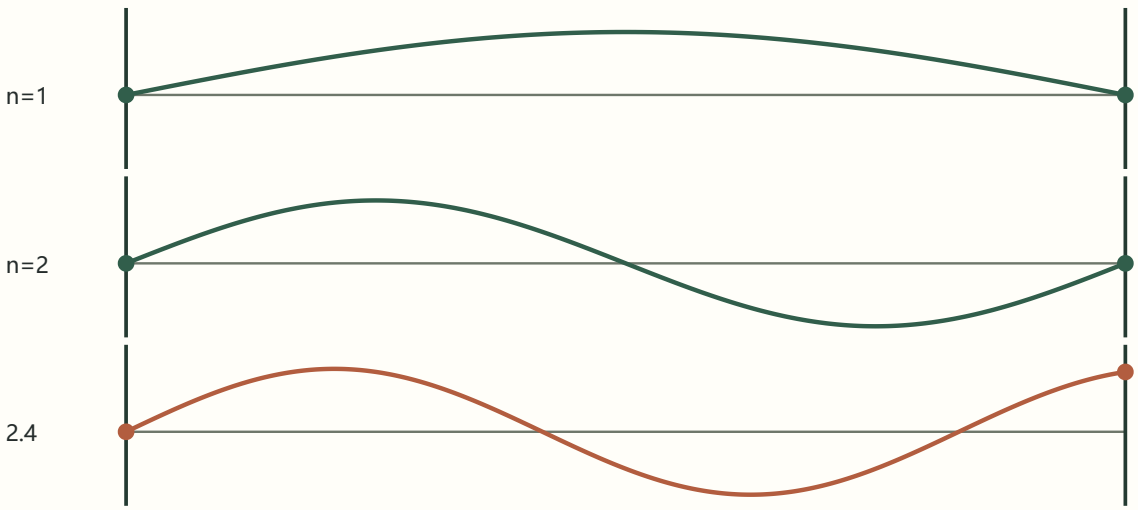
$\lambda=-\mu^2<0$时，$X=A\cosh\mu x+B\sinh\mu x$。左端得$A=0$，右端得$B\sinh\mu l=0$，仍只剩零解。

$\lambda=\mu^2>0$时，$X=A\cos\mu x+B\sin\mu x$。左端得$A=0$；为使$B\neq 0$，右端要求$\sin\mu l=0$。于是

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2, \qquad X_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{l}, \qquad n = 1, 2, \ldots.$$

$n = 0$在这组正弦里只是零函数，不能当作一个模态。负整数给同一特征函数的倍数，不必重复列出。

图 P2-2 固定端只允许区间内恰好容纳整数个半波



前两条右端恰好为零；最后一条的右端不满足边界，不能作为模态。

正弦波数不是任意选取；要求右端同时为零，把连续参数筛成nπ/l。

2.1 · 教材237—239页

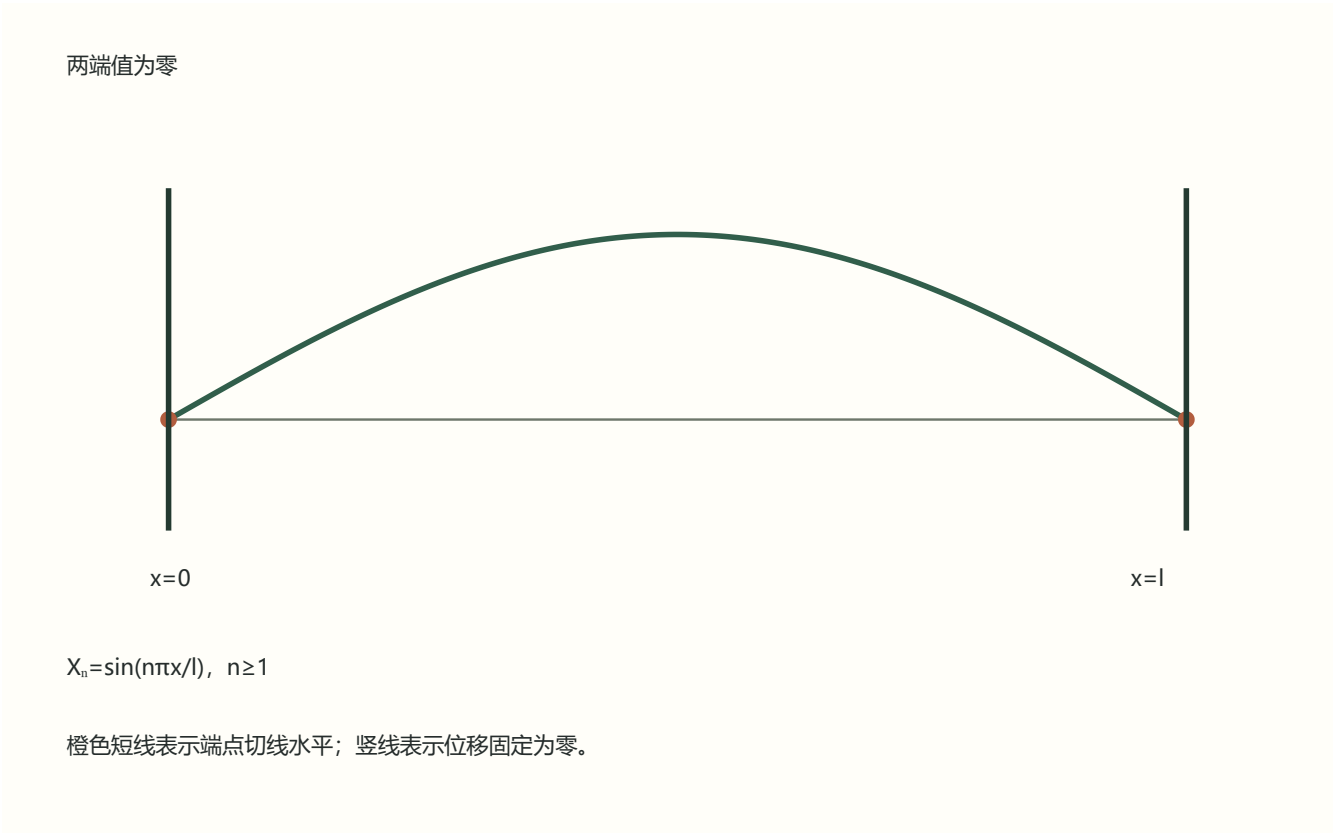
05 四种常见端点组合，别把所有题都写成正弦

下面均指$X'' + \lambda X = 0$，$0 < x < l$；D表示$X = 0$，N表示$X' = 0$。

左右端点	特征函数	特征值及编号
D—D	$\sin(n\pi x/l)$	$(n\pi/l)^2$，$n \geq 1$
N—N	1，$\cos(n\pi x/l)$	0及$(n\pi/l)^2$，$n \geq 1$
D—N	$\sin((n+\frac{1}{2})\pi x/l)$	$((n+\frac{1}{2})\pi/l)^2$，$n \geq 0$
N—D	$\cos((n+\frac{1}{2})\pi x/l)$	同上，$n \geq 0$

表不是凭记忆选的：把$A\cos\mu x+B\sin\mu x$代入两个端点，一两行就可重建。N—N的常数模态对绝热杆平均温度、自由端弦整体平移都很重要，不能丢掉。

图 P2-3 端点类型改变空间形状与允许频率



图示 两端固定：D—D；图示最低固定端模态；n=0不是非零特征函数。

数学物理方程篇·第二章 / 2.2

用初始数据确定有限弦的运动

教材239—242页

2.2 · 教材239—242页

06 时间方程给频率，初值给振幅

对固定端第n个模态，令$k_n=n\pi/l$、$\omega_n=ak_n$。时间方程为$T_n''+\omega_n^2T_n=0$，因此

$$u(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n\cos\omega_nt+B_n\sin\omega_nt\right]\sin k_nx.$$

代入$t=0$：$\varphi=\sum A_n\sin k_nx$。求一次时间导数再令$t=0$：$\psi=\sum\omega_nB_n\sin k_nx$。所以

$$A_n=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(x)\sin k_nx\,dx,\qquad B_n=\frac{2}{l\omega_n}\int_0^l\psi(x)\sin k_nx\,dx.$$

初速度系数必须除以ω_n。 你也可以记$\psi_n=(2/l)\int\psi\sin k_nx$，把时间因子写成$\psi_n\sin\omega_nt/\omega_n$，这样更不容易漏。

2.2 · 教材239—242页

07 系数公式就是正交投影，把积分算出来看

正弦在$(0,l)$上满足

$$\int_0^l\sin k_mx\sin k_nx\,dx=\begin{cases}0, & m\neq n,\\ l/2, & m=n.\end{cases}$$

例如$\varphi=\sum A_n\sin k_nx$，两边乘$\sin k_mx$再积分，其余项消失，只剩$\int\varphi\sin k_mx=A_ml/2$，于是得到系数。正交性让无穷多个未知系数彼此分开。

这和向量在互相垂直的坐标轴上投影是同一思路。后面有权$\rho(x)$时，积分改成$\int\rho fg$；如果特征函数没归一化，分母要保留模平方。**不能把每一道题的系数都写成$2/l$。**

2.2 · 教材239—242页

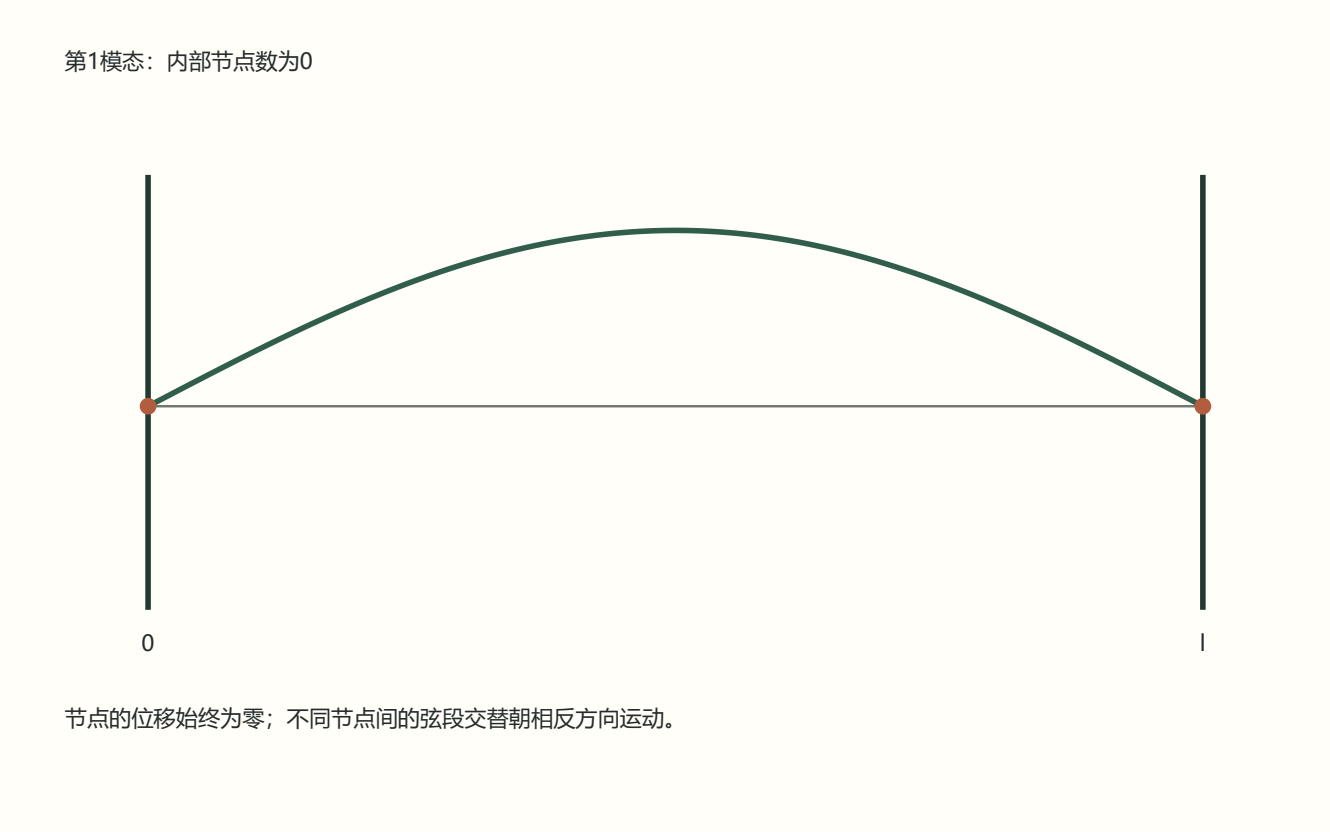
08 完整小例题：初位移和初速度各激发什么

设$\varphi(x)=3\sin(\pi x/l)$、$\psi(x)=2\sin(2\pi x/l)$。根本不必做积分：它们已经是特征函数展开。初位移只激发第一模态，初速度只激发第二模态，

$$u(t,x)=3\cos\frac{\pi at}{l}\sin\frac{\pi x}{l}+\frac{l}{\pi a}\sin\frac{2\pi at}{l}\sin\frac{2\pi x}{l}.$$

检查：第一项初速度为零；第二项在$t=0$位移为零，时间导数系数是$(l/\pi a)(2\pi a/l)=2$；两项在端点都为零。这样查一遍，比盯着整条级数看更有效。

图 P2-4 模态的节点固定，高阶模态有更多内部节点



图示 第1模态；空间形状sin(1πx/l)，角频率为1πa/l；端点节点不计入内部节点数。

2.2 · 教材239—242页

09 抛物线初形状：把教材习题3完整走通

弦端固定，初速度零，初形状顶点为$(l/2,h)$，故$\varphi(x)=4hx(l-x)/l^2$。分部积分两次可得

$$\int_0^l x(l-x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx=\frac{2l^3[1-(-1)^n]}{n^3\pi^3}.$$

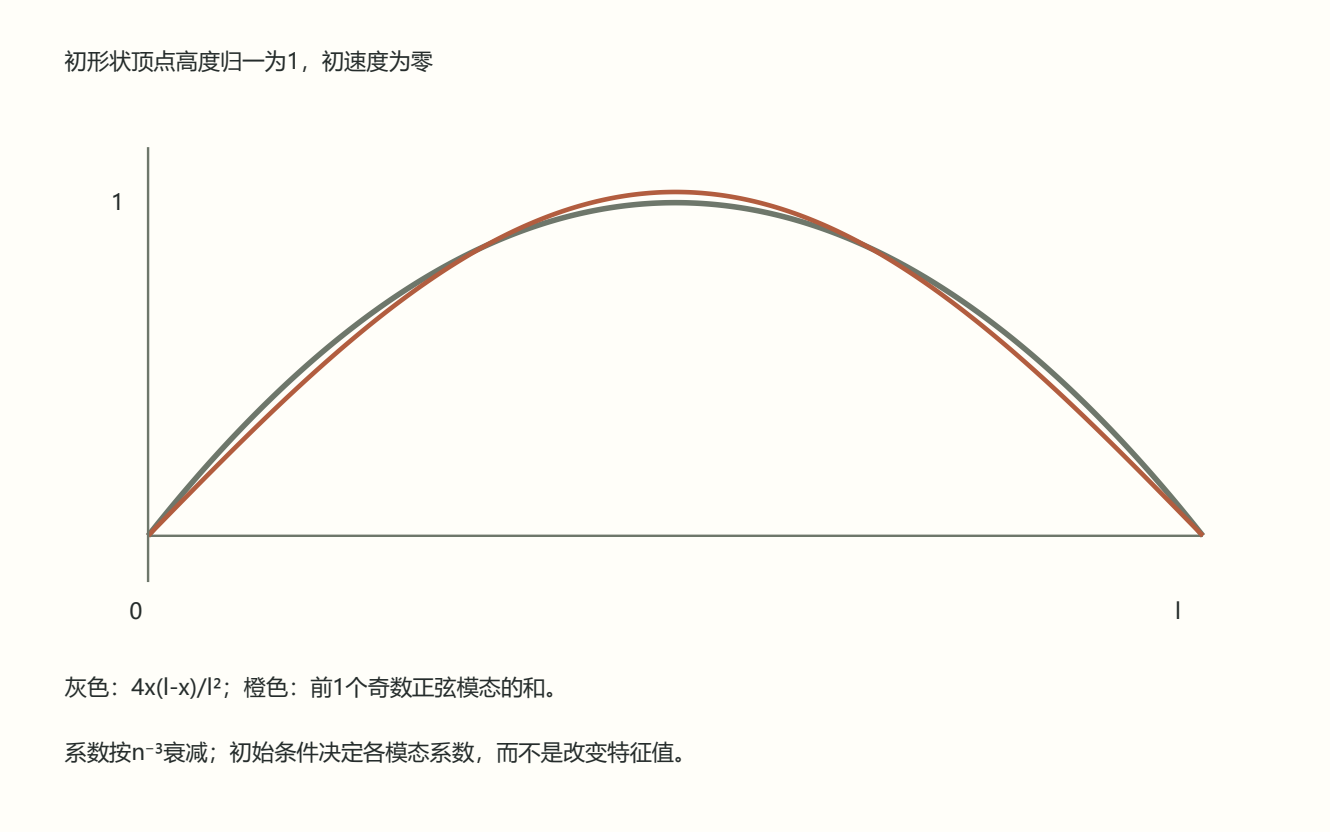
因此

$$A_n=\frac{16h[1-(-1)^n]}{n^3\pi^3},\qquad B_n=0,$$

$$u(t,x)=\frac{32h}{\pi^3}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\cos[(2j+1)\pi at/l]}{(2j+1)^3}\sin\frac{(2j+1)\pi x}{l}.$$

中点对称使偶数模态系数为零。n^{-3}衰减意味着少数低频就能较好近似形状，但精确初值仍由无穷级数表达。

图 P2-5 抛物线初形状由奇数正弦模态逐步拼成



图示 只取第1项；当前保留n=1。偶数模态因对称性没有被激发。

2.2 · 教材239—242页

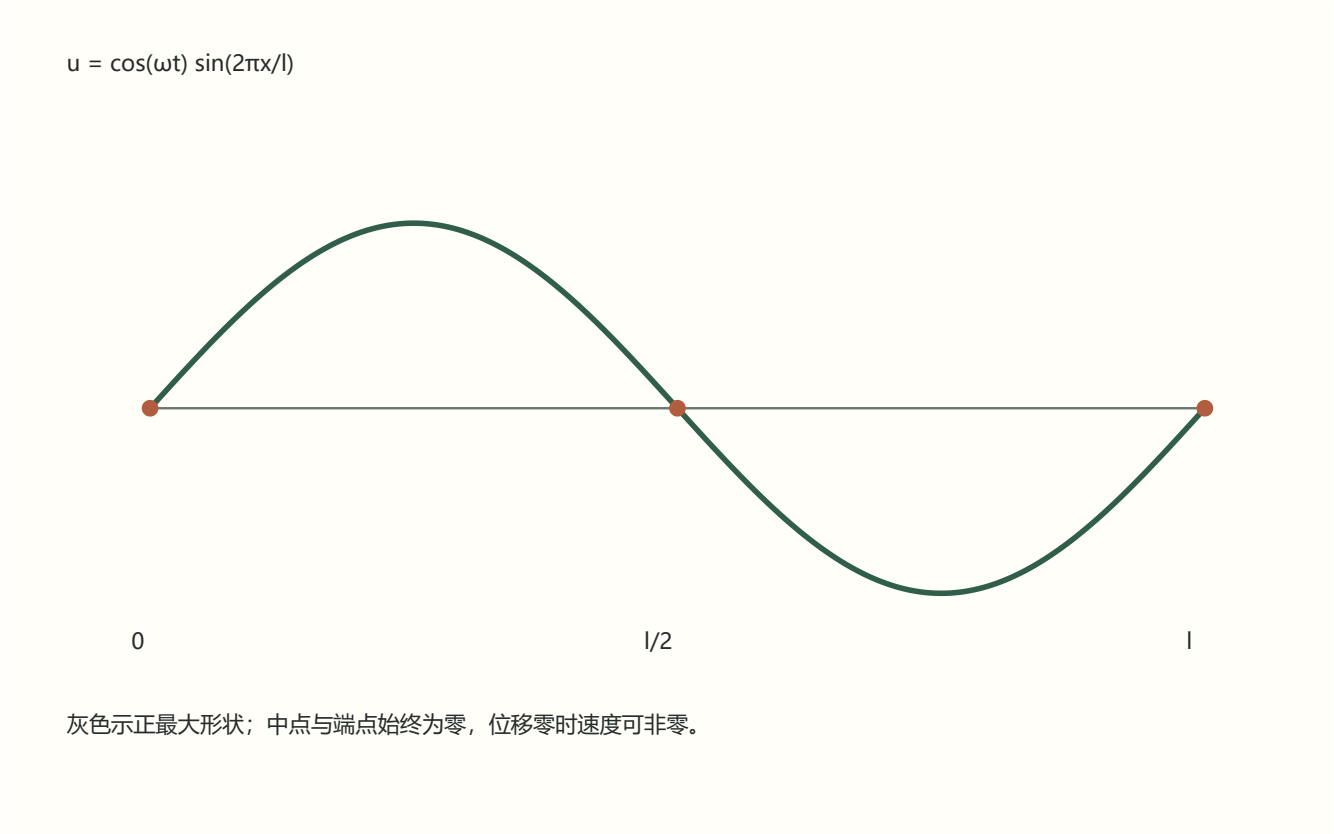
10 驻波与行波怎样联系，哪些物理量要会算

单个固定端模态是驻波：$X_n(x)$的节点位置固定，时间因子只改变幅度与符号。内部有$n-1$个节点，允许波长为$2l/n$，角频率$\omega_n = n\pi a/l$，普通频率为

$$\nu_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{na}{2l}.$$

$a = \sqrt{T/\rho_\ell}$时，基频$\nu_1 = (2l)^{-1}\sqrt{T/\rho_\ell}$。别把角频率和赫兹频率混用。恒等式
$\sin kx\cos kat = \frac{1}{2}[\sin k(x+at) + \sin k(x-at)]$说明驻波也可看成两个反向行波的叠加。

图 P2-6 驻波只改变幅度和符号，节点不移动



图示 相位0：正最大；当前cos(ωt)=1.00；节点始终固定。

相位表达$C\cos\omega t + D\sin\omega t = R\cos(\omega t - \delta)$中$R = \sqrt{C^2 + D^2}$，相位需兼顾象限，可用$\operatorname{atan2}(D, C)$。第一轮会算频率、节点、两个初始系数即可，不必把相位公式当主线背诵。

2.2 · 教材239—242页

11 形式级数何时真是解，端点不相容怎么办

每一项满足方程，不自动保证无穷和可以逐项求两次导数。教材给出足够光滑、并与固定端相容的一组条件来保证经典解；实际做题应区分：先构造级数，再根据数据光滑性说明收敛及求导是否合法。

本章大部分练习，写出特征展开并验证条件是主要训练。对于分段光滑初值，初始级数在内部连续点恢复函数，在跳跃处一般恢复左右极限平均；不能声称处处一致收敛、每处都满足经典导数。

如果$\psi(l) \neq 0$而右端要求固定，则光滑解在角点不能同时满足$u_t(0, l) = 0$和该初速度。仍可在适当较弱意义下讨论内部级数解，但要指出角点问题。讲这里是为了防止“公式算出了，所以一定处处光滑”的误判；第一轮不要求证明泛函分析结论。

数学物理方程篇·第二章 / 2.3

圆域中的拉普拉斯方程

教材242—245页

2.3 · 教材242—245页

12 极坐标把圆周边界变成r等于常数

在二维极坐标,

$$\Delta u = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}.$$

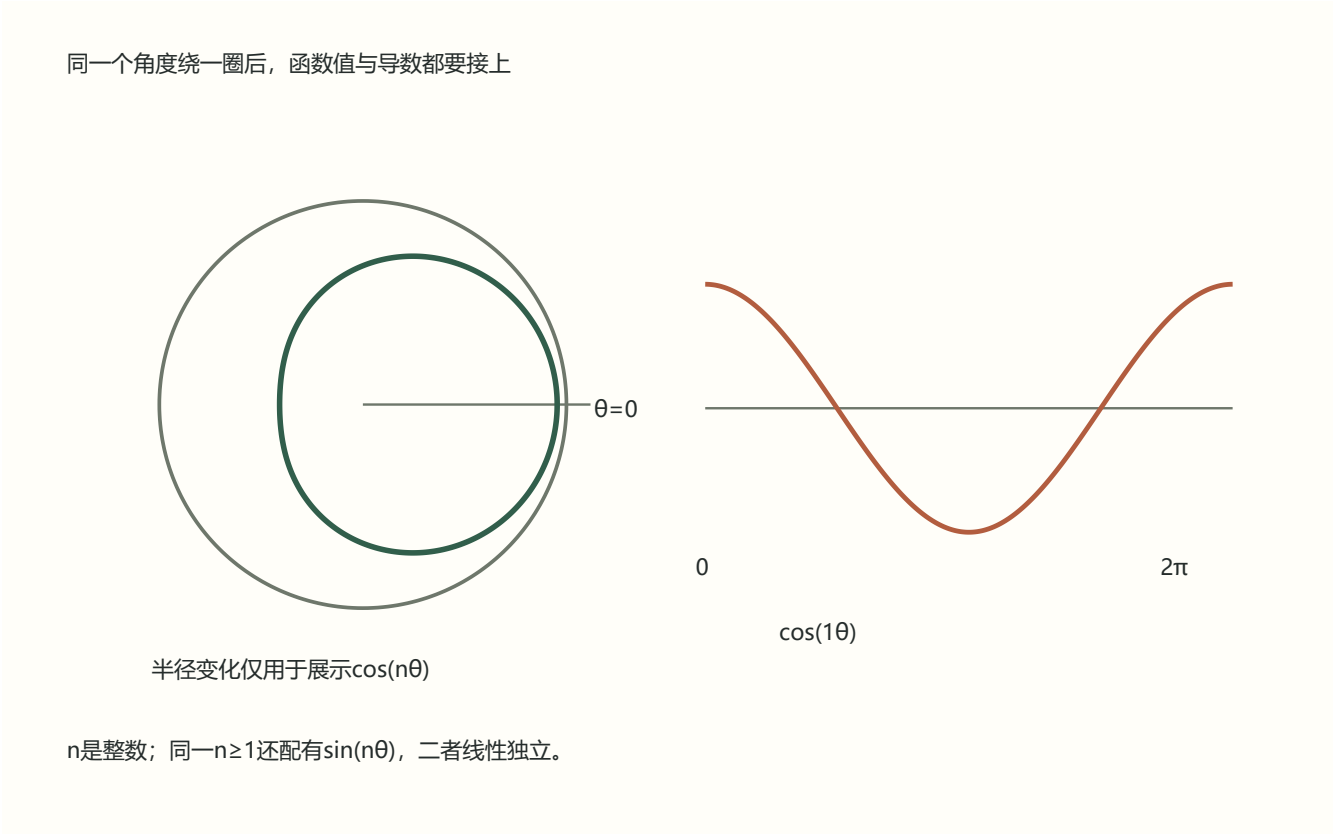
设$u = R(r)\Theta(\theta)$，乘$r^2/(R\Theta)$得

$$\frac{r^2R'' + rR'}{R} = -\frac{\Theta''}{\Theta} = \lambda,$$

$$\Theta'' + \lambda\Theta = 0, \qquad r^2R'' + rR' - \lambda R = 0.$$

完整圆周要求$\Theta(\theta + 2\pi) = \Theta(\theta)$及导数周期匹配。允许$\lambda = n^2$，$n = 0, 1, 2, \ldots$。$n = 0$给常数，$n \geq 1$给$\cos n\theta, \sin n\theta$。角向同一个特征值有两个独立函数，这是周期边界下可能出现重特征值的具体例子。

图 P2-7 角向周期条件只允许整数圈频率



图示 角频率n=1；图左用极径起伏表示角函数，不是温度等值线；图右为角函数值随θ的变化。

2.3 · 教材242—245页

13 径向欧拉方程：圆内、圆环、圆外保留项不同

$n \geq 1$时试$R = r^s$，得到$s^2 - n^2 = 0$，所以$R = Ar^n + Br^{-n}$。$n = 0$时由$(rR')' = 0$得$R = A + B\ln r$。

因而环域中的展开应写成

$$u = A_0 + B_0 \ln r + \sum_{n\geq 1} \left[(A_n r^n + B_n r^{-n}) \cos n\theta + (C_n r^n + D_n r^{-n}) \sin n\theta \right].$$

余弦与正弦的径向系数要独立；不能误用同一组A_n, B_n去限制一般解。

区域与附加要求	处理原则
圆内且原点有界	删$\ln r$与全部r^{-n}
圆环$a < r < b$	原点不在区域，正负幂与对数通常都留
圆外且无穷远有界	删r^n、$\ln r$，常数可留

区域与附加要求	处理原则
圆外且无穷远趋零	常数也删；边界平均值还要相容

图 P2-8 圆内要排除原点奇异项，圆环保留正负幂

圆内 0≤r<R

包含原点，要求有界

n=0：常数可留，ln r删去

n≥1：r^n可留，r^{-n}删去

径向因子归一为$(r/R)^n$



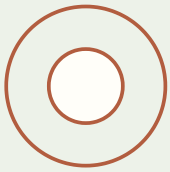
圆环 a<r<b

原点不在区域内

n=0：常数与ln r均可留

n≥1：r^n与r^{-n}均可留

两圆边界联立确定系数



先看区域里有没有奇点，再决定保留哪些分支。

负幂在原点发散，不妨碍它在远离原点的圆环内成为合法调和项。

不要把圆内的删项规则套到圆环；也不要把圆外有界与圆外趋零混为一谈。

2.3 · 教材242—245页

14 圆内狄利克雷问题：角傅里叶系数乘径向因子

要求$\Delta u=0$、$r<R$、$u(R,\theta)=f(\theta)$且原点有界。先展开

$$f(\theta)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n\geq 1}(a_n\cos n\theta+b_n\sin n\theta),$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(\phi)\cos n\phi\,d\phi,\quad b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(\phi)\sin n\phi\,d\phi.$$

其中a_0也用上式余弦公式取$n=0$。那么

$$u(r,\theta)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n\geq 1}\left(\frac{r}{R}\right)^n(a_n\cos n\theta+b_n\sin n\theta).$$

例如边界$2+3\cos\theta-\sin 2\theta$，解为$2+3(r/R)\cos\theta-(r/R)^2\sin 2\theta$。越靠中心，高角频率衰减越快；中心值是边界平均值。

2.3 · 教材242—245页

15 泊松公式是同一串级数的紧凑写法

令$q=r/R<1$。利用几何级数可以求和：

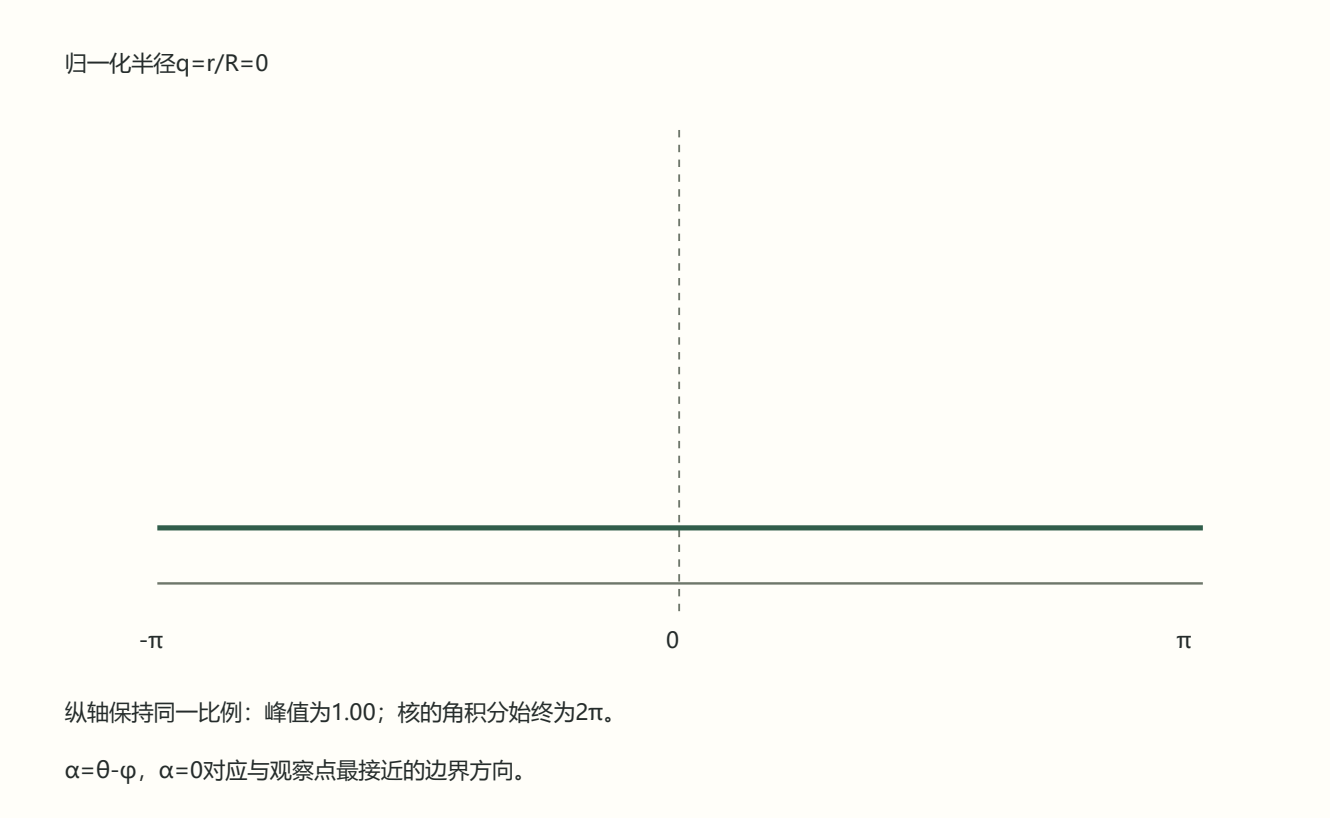
$$1+2\sum_{n=1}^{\infty}q^n\cos n\alpha=\frac{1-q^2}{1-2q\cos\alpha+q^2}.$$

把傅里叶系数代回上节解式，合并余弦差角，得到

$$u(r,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\theta-\phi)+r^2}f(\phi)\,d\phi.$$

核在$r<R$时为正，总积分为2π。所以圆内温度是边界温度的加权平均；$r=0$时权重均匀，靠近边界时集中到附近角度。**本章的泊松积分公式解拉普拉斯方程，不要和非齐次的泊松方程混为一谈。**

图 P2-9 越接近边界，泊松核的权重越集中于附近角度



图示 中心r/R=0；中心的权重均匀；此时u(0)就是边界平均值。

做题时边界只有几个三角项就直接写有限和；边界复杂、要研究平均和极限时才用积分式。第一轮理解核从级数求和而来即可，复杂积分不必强行算闭式。

2.3 · 教材242—245页

16 圆环和扇形：同一方法怎样改

圆环常数边界$u(a)=U_a$、$u(b)=U_b$只含角向零模态，所以

$$u(r)=U_a+(U_b-U_a)\frac{\ln(r/a)}{\ln(b/a)}.$$

圆环非恒定边界，则每个n分别解正负幂系数的二元方程。不要套圆内公式删掉负幂。

扇形$0<\theta<\alpha$、两直边$u=0$时，角向问题改成$\Theta(0)=\Theta(\alpha)=0$，得到$\sin(n\pi\theta/\alpha)$及径向幂$r^{n\pi/\alpha}$。圆弧$r=R$给$f(\theta)$，则

$$u(r,\theta)=\sum_{n\ge1}f_n\Big(\frac{r}{R}\Big)^{n\pi/\alpha}\sin\frac{n\pi\theta}{\alpha},\qquad f_n=\frac{2}{\alpha}\int_0^{\alpha}f(\theta)\sin\frac{n\pi\theta}{\alpha}\,d\theta.$$

这一节直接服务原书习题4、5(6)(7)、8。直边的条件替代整圆周期条件，所以角频率不必是整数。

数学物理方程篇·第二章 / 2.4

施图姆—刘维尔理论怎样用于计算

教材245—249页

2.4 · 教材245—249页

17 为什么需要一般理论：空间方程未必是正弦方程

变系数、径向坐标、换热边界会给出其他空间方程。原书把时间和空间算子分开，写作$L_tu+L_xu=0$。代入$u=XT$，同样能得到两个常微分方程；但空间方程可能是

$$b_0(x)X''+b_1(x)X'+[b_2(x)+\lambda]X=0.$$

理论的作用是告诉我们：在适当条件下，仍可用特征函数展开，且能用正交投影求系数。**不需要每个特征值都能用初等公式表示，数值求根也能继续解题。**

本节记号$\rho(x)$表示展开的权函数，不必是物理密度。看清定义，别因前章用过密度符号就混用单位。

2.4 · 教材245—249页

18 化成自伴形式：把一阶导数装进一个乘积导数

希望写成

$$-(pX')' + qX = \lambda \rho X.$$

对上节方程，取

$$p(x) = \exp \int \frac{b_1(x)}{b_0(x)}\,dx, \qquad \rho(x) = \frac{p(x)}{b_0(x)}, \qquad q(x) = -\rho(x) b_2(x),$$

在$b_0 > 0$的设定下，乘原式以ρ就得到$(pX')' + (\lambda\rho - q)X = 0$。检查$p' = \rho b_1$，才能确认没有乘错。

若原式为$AX'' + BX' + (C + \lambda W)X = 0$，则权应为$\rho = pW/A$，不是一律$p/A$。允许选择公共正常数倍，不改变系数投影的结果。

原书用$k(x)$表示这里的$p(x)$，用ρ表示权；这里只换p以免与波数k_n混淆。 正则问题通常要求p, ρ在闭区间为正、系数足够连续，加自伴边界。奇异端点需要额外判断，不能把正则结论原封不动推广。

2.4 · 教材245—249页

19 两个变系数例子：权不是装饰

例一：$X'' - 2cX' + \lambda X = 0$，$X(0) = X(l) = 0$。取$X = e^{cx}Y$，则$Y'' + (\lambda - c^2)Y = 0$，于是

$$\lambda_n = c^2 + \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2, \qquad X_n = e^{cx}\sin\frac{n\pi x}{l}, \qquad \rho = e^{-2cx}.$$

两特征函数相乘后再乘权，指数恰好消掉，恢复正弦的正交性。若漏权，通常不正交。

例二（原书例2）：$X'' + X'/x + \lambda X/x^2 = 0$，$1 < x < e$，两端零。乘$x$，得到$-(xX')' = \lambda X/x$，所以$p = x$、$q = 0$、$\rho = 1/x$。再令$s = \ln x$，方程成为$Y_{ss} + \lambda Y = 0$，$0 < s < 1$。因此

$$\lambda_n = n^2\pi^2, \quad X_n(x) = \sin(n\pi \ln x), \quad \int_1^e \frac{X_m X_n}{x}\,dx = \frac{1}{2}\delta_{mn}.$$

2.4 · 教材245—249页

20 自伴边界与奇异端点：需要会判断到什么程度

常见分离边界可写为$X'(a) - h_a X(a) = 0$、$X'(b) + h_b X(b) = 0$，$h_a, h_b \ge 0$，以及D或N端点。符号来自外法向：左负右正。周期边界需要函数及通量匹配；若$p(a) = p(b)$，可写成$X(a) = X(b)$、$X'(a) = X'(b)$。

径向方程如$(rR')' - n^2R/r = 0$在$r = 0$是奇异的。圆内的有界性排除$\ln r$或r^{-n}，相当于从物理区域选择允许分支；**不是在原点随手再加一个任意的$R(0) = 0$**。角向零模态的圆内常数解明明可以非零。

正则理论的离散谱、展开性质很实用；奇异问题要结合具体方程、端点行为和选定函数空间。原书的自然边界介绍在这里先理解成“保留物理允许的分支”，一般奇异谱论可暂缓。本章会给径向例子，下一章再系统学习特殊函数。

数学物理方程篇·第二章 / 2.5

正交性零模态与展开条件

教材249—253页

2.5 · 教材249—253页

21 正交性的证明只抓住一个消去动作

设X_m, X_n满足$-(pX')' + qX = \lambda\rho X$。把第$m$式乘$X_n$，第$n$式乘$X_m$，相减并积分，得到

$$(\lambda_m - \lambda_n)\int_a^b \rho X_m X_n\,dx = \Big[p(X_m X_n' - X_m' X_n)\Big]_a^b.$$

自伴边界使右边为零。若$\lambda_m \neq \lambda_n$，便有$\int \rho X_m X_n = 0$。同一特征值下多个独立函数不由这一步自动正交；例如圆周的$\sin n\theta, \cos n\theta$需要另外选正交基。

为什么讲证明： 它直接告诉你权从哪里来、为什么边界需要相同、为什么不同特征值的项能在积分中消失。掌握“交叉相乘、相减、分部积分、边界项为零”即可，不要求背每行下标。

图 P2-10 乘权以后才得到互不干扰的正交投影



只有特征函数模平方恰好等于l/2时，通用系数公式才化成2/l乘积分。

2.5 · 教材249—253页

22 非负性有条件，零特征值要单独处理

方程乘X后积分：

$$\lambda \int_a^b \rho X^2 dx = \int_a^b [p(X')^2 + qX^2]dx - [pXX']_a^b.$$

若$p, \rho > 0$、$q \geq 0$，边界是D、N或具有上述非负换热系数的Robin条件，则右边非负。Robin边界贡献为$p(a)h_a X(a)^2 + p(b)h_b X(b)^2$。所以$\lambda \geq 0$。

若$\lambda = 0$，所有非负项均为零。故X为常数；要有非零常数，须$q \equiv 0$，并且没有迫使常数为零的D端点或正Robin系数。N—N或合适周期边界常有零模态。

“一切施图姆—刘维尔特征值都非负”是错误的。 若q为负或边界系数改变符号，可能有负特征值。本章物理题的非负性来自这些具体假设。

2.5 · 教材249—253页

23 通用系数公式与两类时间演化

定义带权内积$\langle f,g\rangle_\rho=\int_a^b \rho f g\,dx$、模平方$N_n=\int_a^b \rho X_n^2 dx$。展开系数为

$$f_n=\frac{\int_a^b \rho(x)f(x)X_n(x)dx}{N_n}.$$

若空间算子满足$\mathcal{A}X_n=\lambda_n X_n$，则$u_{tt}+a^2\mathcal{A}u=0$的正特征值模态为$\varphi_n\cos(a\sqrt{\lambda_n}t)+\psi_n\sin(a\sqrt{\lambda_n}t)/(a\sqrt{\lambda_n})$；$u_t+\kappa\mathcal{A}u=0$的模态为$\varphi_n e^{-\kappa\lambda_n t}$。

$\lambda=0$时，波动时间方程是$T''=0$，解为$\varphi_0+\psi_0 t$；热方程是$T'=0$，解为常数φ_0。**含$1/\sqrt{\lambda}$的公式不能直接代零；必须回到时间方程。**

2.5 · 教材249—253页

24 原书Neumann例题：在负l到l上不要漏一半频率

对$X''+\lambda X=0$、$-l<x<l$、$X'(-l)=X'(l)=0$，最简写法是平移到$(0,2l)$：

$$X_n(x)=\cos\frac{n\pi(x+l)}{2l},\quad \lambda_n=\left(\frac{n\pi}{2l}\right)^2,\quad n=0,1,\dots.$$

其中$n=0$给常数。若只写$\cos(n\pi x/l)$，会漏掉在对称区间上的奇函数模态。教材用行列式算出相同结果，提醒我们**区间长度是$2l$，不能看到字母l就套长度l的频率**。

2.5 · 教材249—253页

25 完备性与收敛：知道用途即可，别在这里卡死

正交只说明不同模态互不干扰，完备才保证它们足够表示所需数据。正则自伴问题有离散实特征值，特征函数可组成适合的完备系统。通常至少可在带权平方可积意义下理解展开；要逐点、一致或逐项求导，则需额外光滑性与边界相容条件。

原书给出较光滑且满足边界条件的函数展开情形；你做题应明确正在使用哪一级结论。不能把一般L^2函数的展开都说成一致收敛，也不能从“展开成立”立刻推出任意次数逐项求导合法。

第一轮的掌握线： 会识别权、算模平方、求系数、处理零模态，并对明显的端点不相容作说明。谱定理的完整证明暂缓，因为它不是本章基本计算题的必要步骤。

数学物理方程篇·第二章 / 2.6

换热杆与长方体中的应用

教材254—258页

2.6 · 教材254—258页

26 一端绝热一端换热：根由超越方程决定

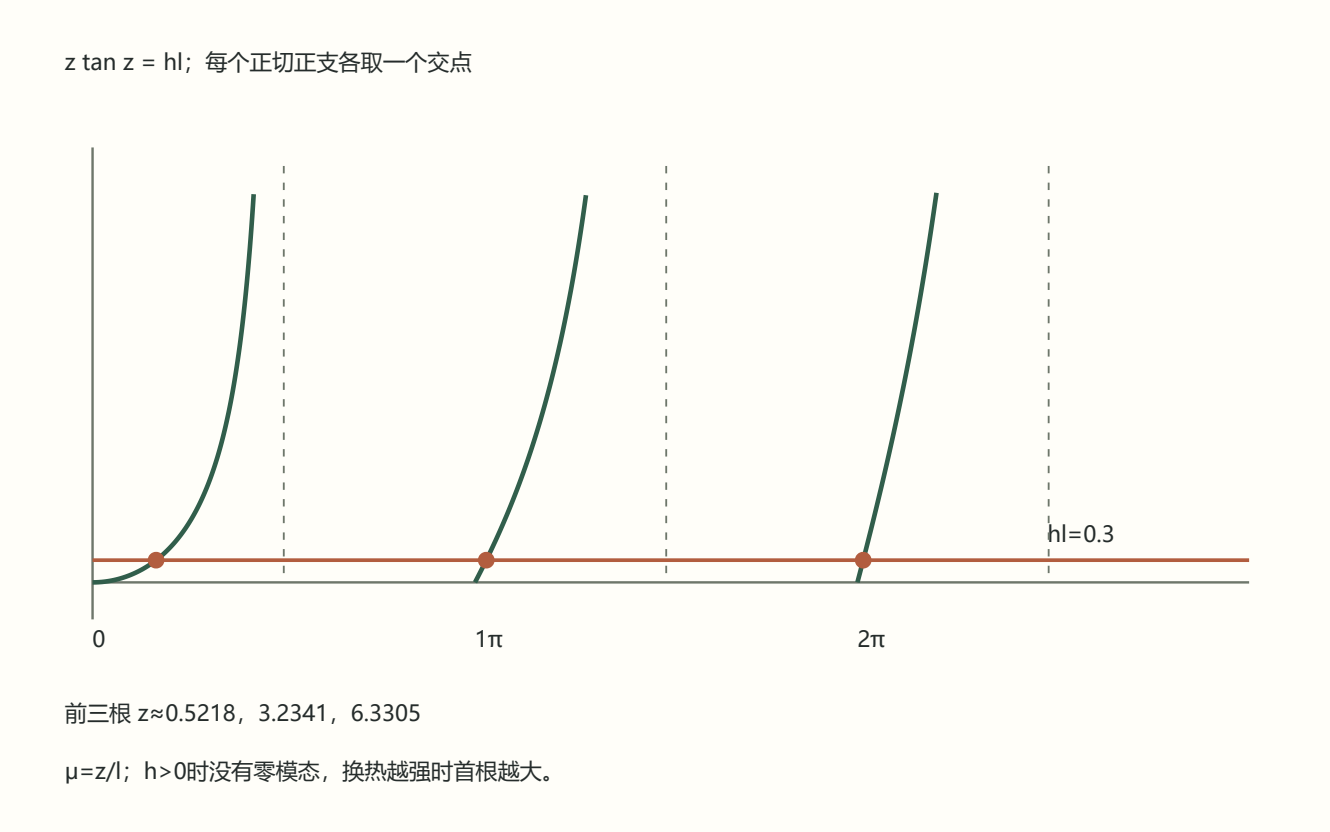
原书例3：$u_t = a^2 u_{xx}$，$u_x(t,0) = 0$、$u_x(t,l) + hu(t,l) = 0$，$h > 0$，$u(0,x) = \varphi(x)$。这里h已经包含导热系数的归一化，单位是长度的倒数。

空间解$X = A\cos \mu x + B\sin \mu x$，绝热端给$B = 0$，右端给

$$\mu \sin \mu l = h\cos \mu l, \qquad z\tan z = hl, \quad z = \mu l.$$

对$h > 0$，无零模态；第n个正根$z_n \in ((n-1)\pi, (n-\tfrac{1}{2})\pi)$，$n \geq 1$。用连续行列式$\mu \sin \mu l - h\cos \mu l = 0$检查，比随意除以cos更稳妥。此例确实不允许$\cos \mu l = 0$，才可用正切形式。

图 P2-11 换热边界的频率由z·tan z与hl的交点确定



图示 较弱换热hl=0.3；当前hl=0.3，首根在(0,π/2)，下一根在(π,3π/2)。每一根都在正切的极点左侧。

2.6 · 教材254—258页

27 Robin系数的模平方要算，长期由最小根控制

令$\mu_n = z_n/l$，特征函数$X_n = \cos \mu_n x$。模平方

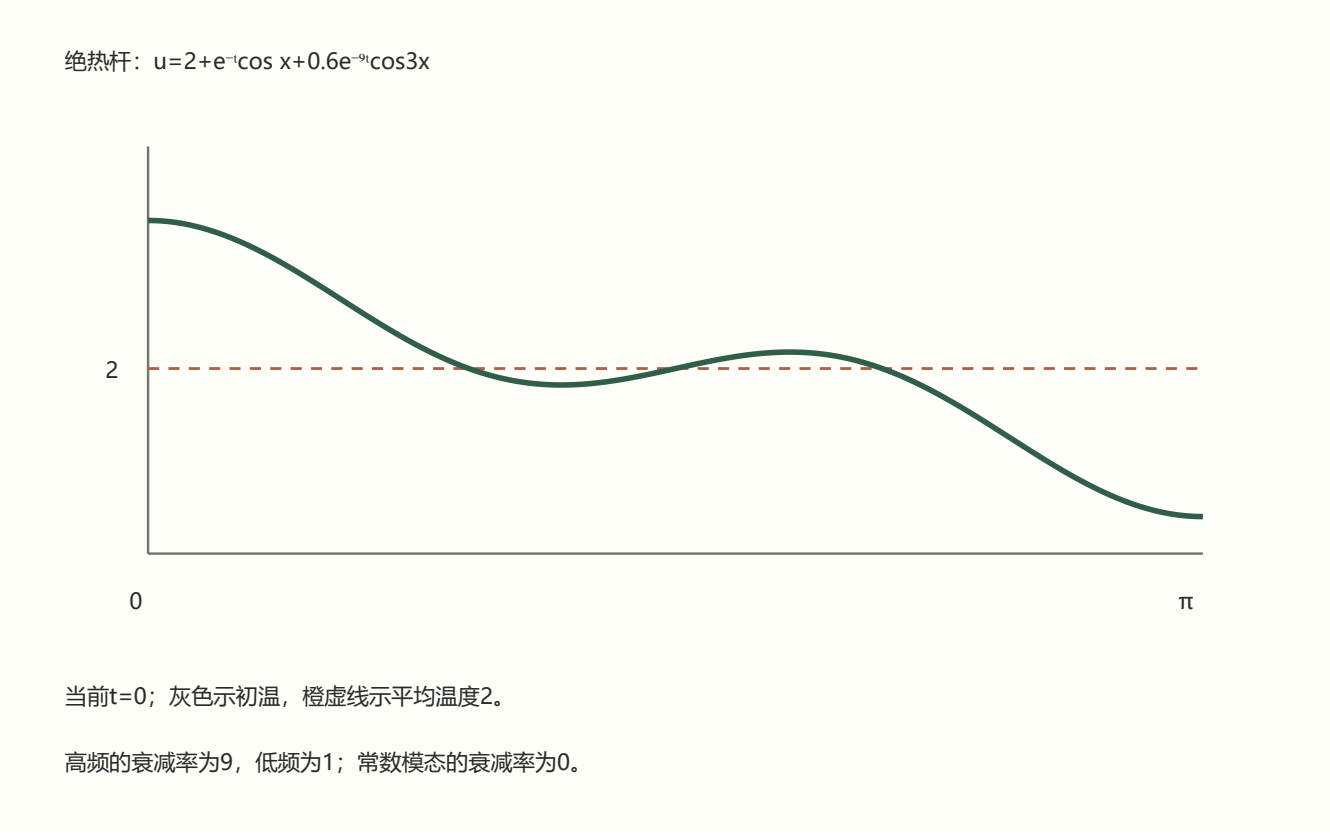
$$N_n = \int_0^l \cos^2 \mu_n x \, dx = \frac{l}{2} + \frac{\sin 2\mu_n l}{4\mu_n} = \frac{1}{2}\left(l + \frac{h}{\mu_n^2 + h^2}\right).$$

最后一步用了$\mu_n \tan \mu_n l = h$。解为

$$u(t,x) = \sum_{n \geq 1} \frac{\int_0^l \varphi(s) \cos \mu_n s \, ds}{N_n} e^{-a^2 \mu_n^2 t} \cos \mu_n x.$$

对足够好的初值，所有温度模态衰减，长期趋零；最小根决定最慢衰减。$h \to 0$时出现接近零的根，恢复两端绝热的平均温度模态；$h \to \infty$时根趋向$(n - \frac{1}{2})\pi/l$，趋近右端固定零温度的混合边界谱。**不能把有限h的特征函数直接换成整数余弦。**

图 P2-12 热方程高频衰减更快，绝热平均值保持



图示 t=0；当前高频系数=0.6000，低频系数=1.0000，总热量保持为2π。

2.6 · 教材254—258页

28 绝热杆：热量不丢失，常数模态不会衰减

对$u_t=\kappa u_{xx}$，$u_x(t,0)=u_x(t,l)=0$，初温f，解为

$$u(t,x)=\overline{f}+\sum_{n\ge 1}c_n e^{-\kappa(n\pi/l)^2 t}\cos\frac{n\pi x}{l},$$

$$\overline{f}=\frac{1}{l}\int_0^l f(x)dx,\qquad c_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx.$$

积分方程也可直接看出$\frac{d}{dt}\int_0^l u\,dx=\kappa[u_x]_0^l=0$。长期趋于初温平均值，不是零。若只背$e^{-\kappa\lambda_n t}$而忘记$\lambda_0=0$，就会得到与守恒矛盾的结论。

2.6 · 教材254—258页

29 三维长方体电势：分离后出现双重级数

原书例4：$\Delta u=0$于$0<x<a,0<y<b,0<z<c$，除顶面外五面零电势，顶面$u(x,y,c)=F(x,y)$。设$u=XYZ$，横向两组固定零边界给

$$X_m=\sin\frac{m\pi x}{a},\quad Y_n=\sin\frac{n\pi y}{b},\quad \gamma_{mn}=\sqrt{(m\pi/a)^2+(n\pi/b)^2}.$$

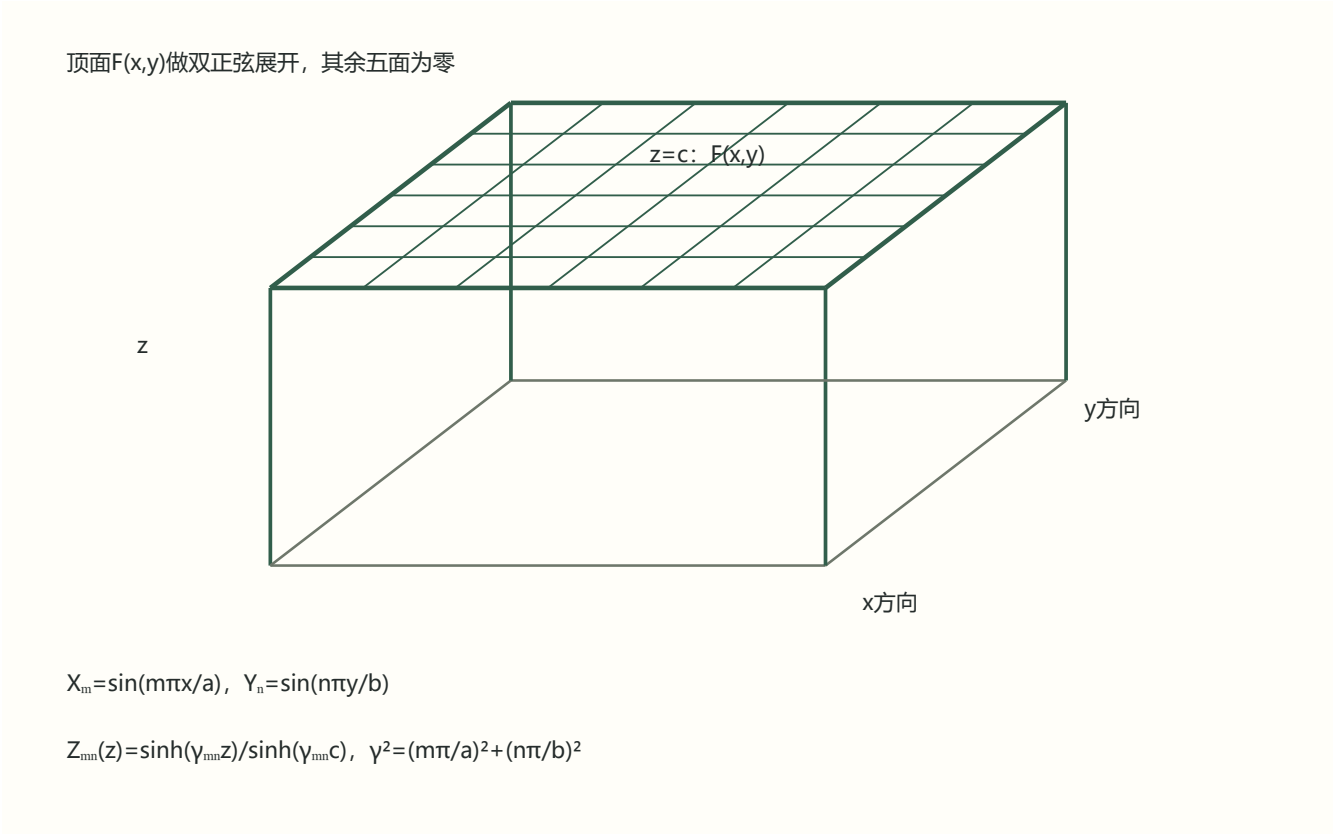
$Z''-\gamma_{mn}^2 Z=0$，底面$Z(0)=0$，用归一化因子$Z(z)=\sinh(\gamma_{mn}z)/\sinh(\gamma_{mn}c)$最省事。因此

$$u=\sum_{m,n\ge 1}F_{mn}\frac{\sinh(\gamma_{mn}z)}{\sinh(\gamma_{mn}c)}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b},$$

$$F_{mn}=\frac{4}{ab}\int_0^a\int_0^b F(x,y)\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\,dy\,dx.$$

这里z是空间，不是时间，故双曲正弦没有热衰减的含义。顶面边缘若和其余面数据不相容，需注意棱边处的连续性。

图 P2-13 两个横向正弦相乘，第三方向用双曲正弦匹配顶面



顶面网格只表示双变量边界数据；每个横向模态各有一个归一化的竖向因子。

2.6 · 教材254—258页

30 矩形膜和二维热方程：只更换时间方程

矩形$0<x<L_x, 0<y<L_y$四边固定零，空间函数同样是正弦乘积，特征值
$\lambda_{mn}=(m\pi/L_x)^2+(n\pi/L_y)^2$。

波动问题每项时间因子为$\varphi_{mn}\cos(a\sqrt{\lambda_{mn}}t)+\psi_{mn}\sin(a\sqrt{\lambda_{mn}}t)/(a\sqrt{\lambda_{mn}})$；热问题每项为$\varphi_{mn}e^{-\kappa\lambda_{mn}t}$。系数投影都用$4/(L_xL_y)$的双积分。

一个空间谱可以服务不同物理方程，时间行为由原来的时间导数决定。 这一步直接覆盖原书习题12(2)(3)，无需从头背两套互不相关的公式。

数学物理方程篇·第二章 / 2.7

齐次边界下的非齐次方程

教材259—263页

2.7 · 教材259—263页

31 有源项也要展开到同一组空间函数

固定端受迫波动$u_{tt}=a^2u_{xx}+f(t,x)$，令

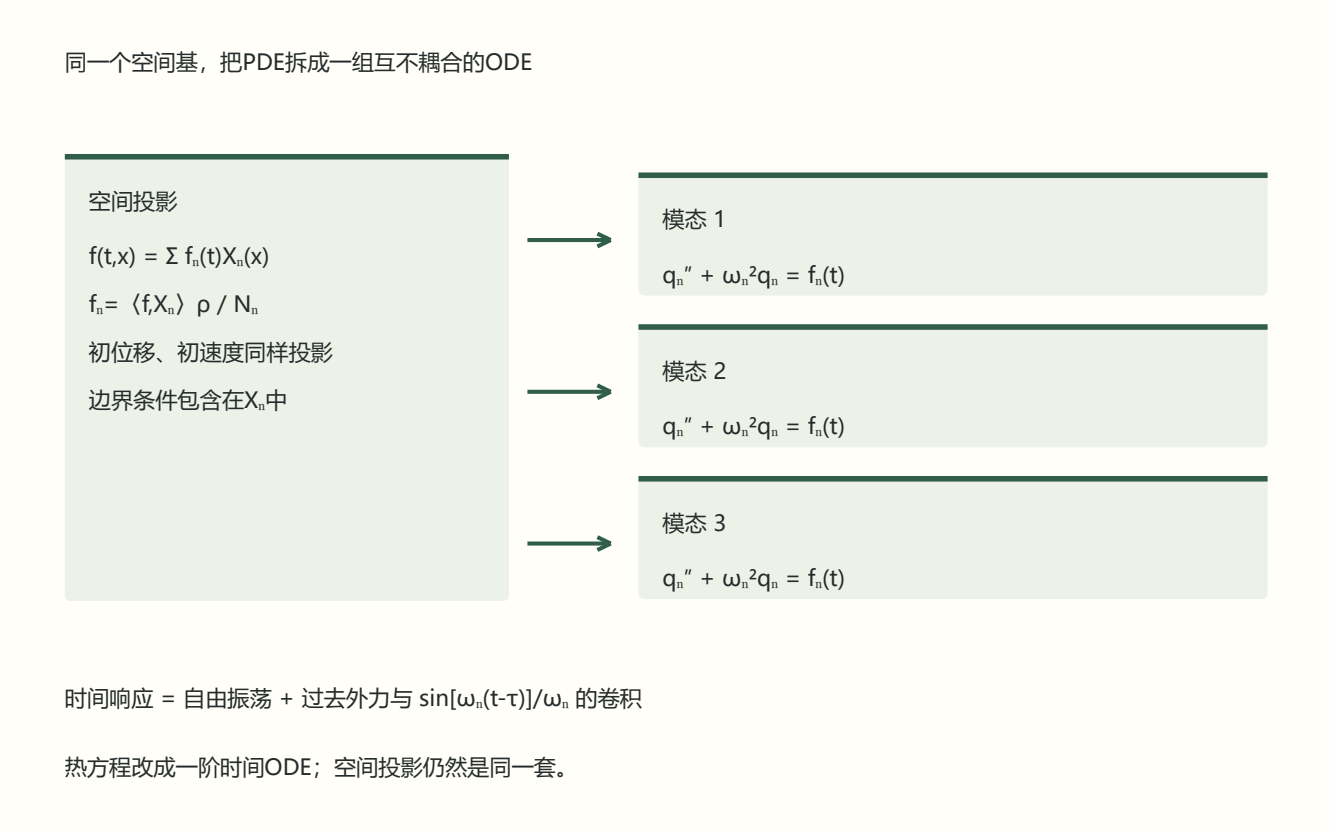
$$u=\sum q_n(t)\sin k_nx,\qquad f=\sum f_n(t)\sin k_nx,\quad f_n(t)=\frac{2}{l}\int_0^l f(t,x)\sin k_nx\,dx.$$

代入并利用投影，得到独立的受迫振子

$$q_n''+\omega_n^2q_n=f_n(t),\quad q_n(0)=\varphi_n,\quad q_n'(0)=\psi_n.$$

空间部分不变；非齐次项改变的是时间方程。把f直接当成一个常数塞进最终级数，会忽略其空间分布如何激发不同模态。

图 P2-14 外力先按空间投影，每个模态各解一个受迫振子



此图针对线性、齐次边界问题；非零边界应先提升，再把新的源投影。

2.7 · 教材259—263页

32 每个模态用卷积解决，和前面拉普拉斯变换接上

对$\omega_n>0$，由常微分方程或拉普拉斯变换得

$$q_n(t)=\varphi_n\cos\omega_n t+\frac{\psi_n}{\omega_n}\sin\omega_n t+\frac{1}{\omega_n}\int_0^t f_n(\tau)\sin[\omega_n(t-\tau)]d\tau.$$

最后一项就是零初值受迫响应。第七章的$1/(s^2+\omega_n^2)$反演成$\sin\omega_n t/\omega_n$，卷积定理在这里直接派上用场；不必每个模态都重新做部分分式。

热方程$u_t=\kappa u_{xx}+f$、齐次D边界对应

$$q_n'+\alpha_n q_n=f_n(t),\quad \alpha_n=\kappa k_n^2,$$

$$q_n(t)=\varphi_n e^{-\alpha_n t}+\int_0^t e^{-\alpha_n(t-\tau)}f_n(\tau)d\tau.$$

若空间零模态存在，波动核改成$t-\tau$，热核改成1，仍从相应常微分方程推出。

2.7 · 教材259—263页

33 原书热源例题：两个指数相等时必须取极限

原书例2：$u_t=a^2u_{xx}+A(1-x/l)e^{-ht}$，两端零，初温零。因为

$$\frac{2}{l}\int_0^l(1-x/l)\sin k_n x\,dx=\frac{2}{n\pi},$$

有$f_n(t)=2Ae^{-ht}/(n\pi)$。记$\alpha_n=a^2k_n^2$，则

$$q_n(t)=\frac{2A}{n\pi}\begin{cases}\dfrac{e^{-ht}-e^{-\alpha_n t}}{\alpha_n-h}, & h\neq\alpha_n,\\ te^{-\alpha_n t}, & h=\alpha_n.\end{cases}$$

最后乘$\sin k_n x$求和。教材为书写方便排除了相等情形；相等不是无解，而是积分给$te^{-\alpha_n t}$。**遇到分母为零，先回到卷积或取极限，别直接宣布公式失效就无解。**

2.7 · 教材259—263页

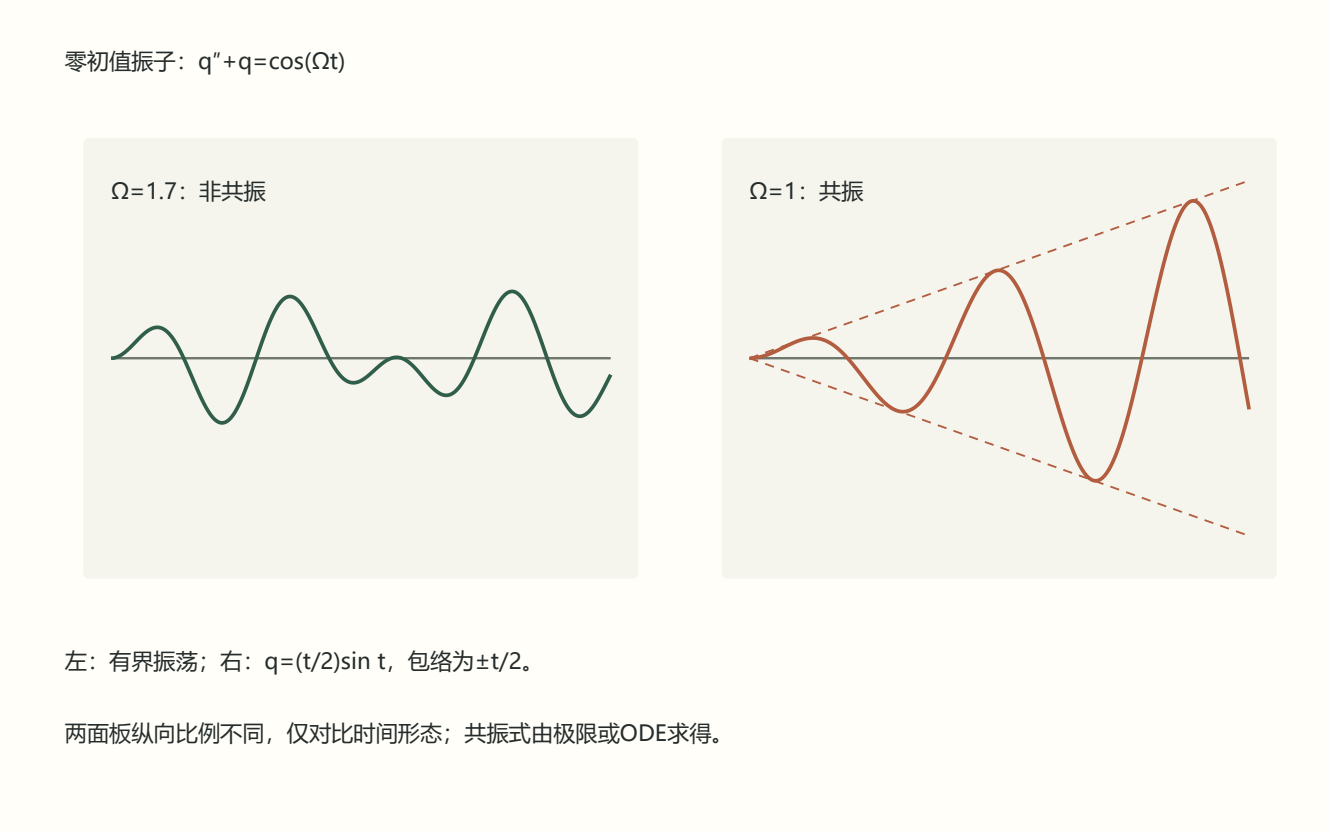
34 外力频率碰到固有频率：共振怎样进入答案

若一个零初值模态满足$q''+\omega^2 q=F\cos\Omega t$，则

$$q(t)=\frac{F}{\omega^2-\Omega^2}(\cos\Omega t-\cos\omega t),\quad \Omega\neq\omega.$$

$\Omega=\omega$时，应改为$q=Ft\sin\omega t/(2\omega)$，振幅随时间线性增大。它依然是线性方程的解，不代表可以把小振幅物理假设无限期使用。

图 P2-15 驱动频率等于固有频率时，振幅出现随时间增长的包络



分母ω²-Ω²为零时，回到时间方程求共振响应；无阻尼模型中振幅可持续增长。

本节是对教材非齐次模态法的必要补充：教材有时预先声明频率不相等，实际做题要自己检查这个限制。第一轮至少会识别共振并回到时间方程，不能保留零分母。

2.7 · 教材259—263页

35 时间无关的源：先求稳态特解往往更快

对$u_t=\kappa u_{xx}+F(x)$或$u_{tt}=a^2u_{xx}+F(x)$，且两端齐次，可以先求满足相同边界的静态解v：热问题$\kappa v''+F=0$，波动问题$a^2v''+F=0$。令$u=v+w$后，w的方程和边界齐次，初位移或初温改为原数据减v。

例如$F(x)=F_0$，两端零，热稳态$v=F_0x(l-x)/(2\kappa)$。初温为零时$w(0,x)=-v(x)$；不是零。长期$u\to v$。

齐次边界很关键：如果v只是方程特解，却不满足边界，则还要同步改边界。选择特解是为简化整体定解问题，不能只盯着方程一项。

数学物理方程篇·第二章 / 2.8

非齐次边界怎样化成齐次边界

教材263—265页

2.8 · 教材263—265页

36 提升函数不唯一，但新方程和新初值必须一起改

对$u_{tt}=a^2u_{xx}+f$，$u(t,0)=g_0(t)$、$u(t,l)=g_l(t)$，选

$$v(t,x)=(1-x/l)g_0(t)+(x/l)g_l(t),\qquad u=v+w.$$

则w两端为零，但

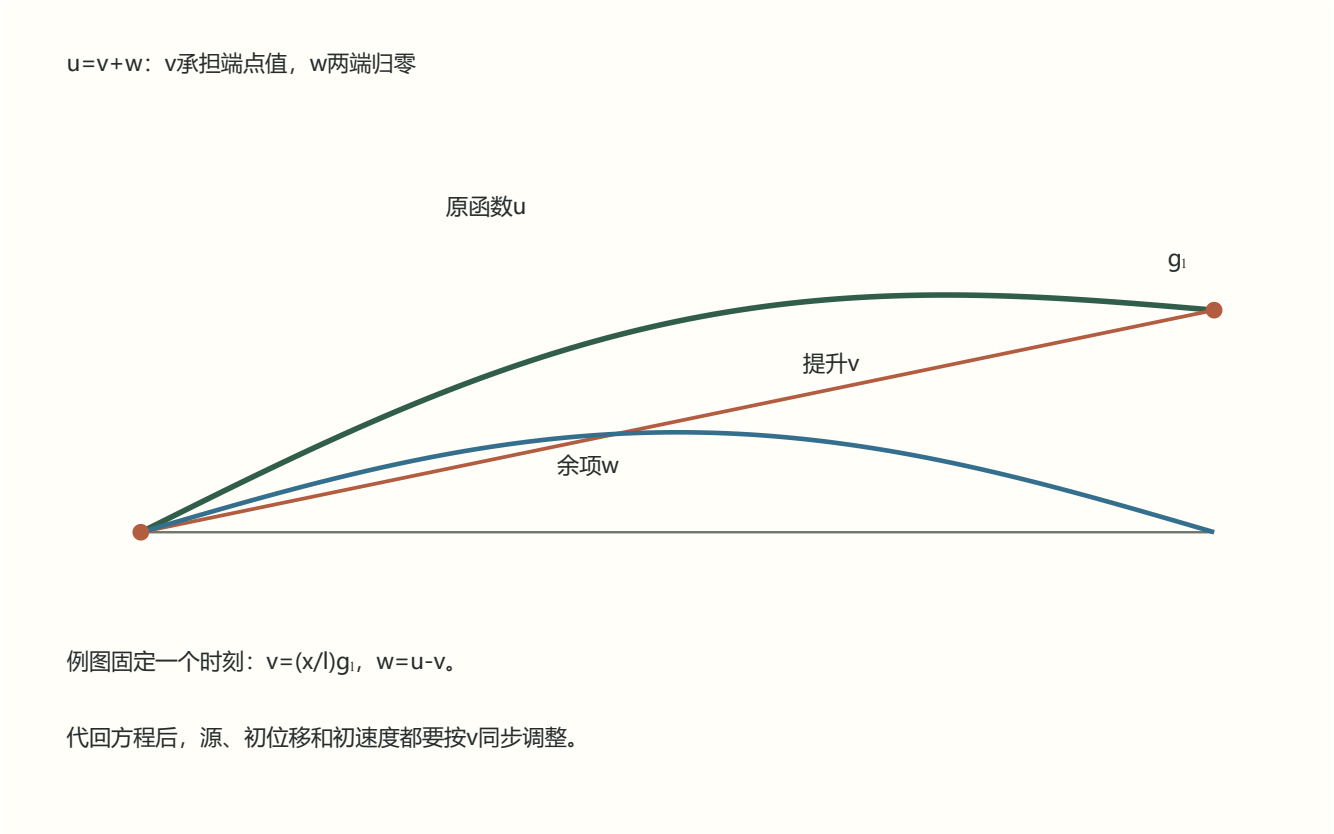
$$w_{tt}=a^2w_{xx}+f+a^2v_{xx}-v_{tt},$$

$$w(0,x)=\varphi(x)-v(0,x),\quad w_t(0,x)=\psi(x)-v_t(0,x).$$

线性提升有$v_{xx}=0$。热问题相应为$w_t=\kappa w_{xx}+f+\kappa v_{xx}-v_t$、$w(0,x)=\varphi-v(0,x)$。

不是把边界的非零函数删掉，而是用已知v把它承担起来。 若是非零导数或Robin条件，也应选能满足这些边界算子的v，不能机械套上面的线性插值。

图 P2-16 已知提升承担非零边界，余项改为齐次边界



绿色函数右端非零；橙色直线承担相同端点值；蓝色差函数在两端都为零。

2.8 · 教材263—265页

37 右端正弦驱动：最通用的提升始终能用

原书例3：固定左端，右端$u(t,l)=\sin\Omega t$，弦初始静止，内部无外力。取$v=(x/l)\sin\Omega t$，于是

$$w_{tt}=a^2w_{xx}+\frac{\Omega^2x}{l}\sin\Omega t,\quad w(0,x)=0,\quad w_t(0,x)=-\frac{\Omega x}{l}.$$

之后用上节受迫模态公式即可。这个提升对共振频率也能构造；难点在后续时间方程，不在提升本身。

原题$u_t(0,l)$的右端驱动导数为Ω，却给弦初速度零，所以角点不满足一阶相容条件。教材仍作内部级数构造；讲义据此明确：不能宣称在闭时空区域处处光滑满足所有导数条件。

2.8 · 教材263—265页

38 特别选一个满足方程的提升，可以少算一层受迫项

若$\sin(\Omega l/a)\neq0$，可取

$$v(t,x)=\frac{\sin(\Omega x/a)}{\sin(\Omega l/a)}\sin\Omega t.$$

它同时满足波动方程和两端给定位移。于是$w=u-v$满足齐次波动方程、齐次边界，初位移零、初速度$-\Omega\sin(\Omega x/a)/\sin(\Omega l/a)$。直接投影后

$$w(t,x)=\sum_{n\ge1}\frac{2\Omega al(-1)^{n+1}}{(\Omega l)^2-(n\pi a)^2}\sin\omega_n t\sin k_n x.$$

总解为$v+w$。当$\Omega l/a$是整数倍π时，这种“纯周期提升”不存在，不能继续使用；回到上一种线性提升及受迫模态法，便能处理共振。**某个便捷特解不存在，不等于原初边值问题无解。**

2.8 · 教材263—265页

39 非零热边界的完整例子：长期值来自稳态

设$u_t=\kappa u_{xx}$，$u(t,0)=U_0$、$u(t,l)=U_l$，初温φ。取$v=U_0+(U_l-U_0)x/l$，满足稳态和边界；故

$$u(t,x)=v(x)+\sum_{n\ge1}b_n e^{-\kappa k_n^2 t}\sin k_n x,\quad b_n=\frac{2}{l}\int_0^l[\varphi(x)-v(x)]\sin k_n x\,dx.$$

若初温处处零，且$U_0=1,U_l=0$，则$b_n=-2/(n\pi)$，所以$u=1-x/l-\sum_{n\ge1}2e^{-\kappa k_n^2 t}\sin k_n x/(n\pi)$。$t\to\infty$趋于线性温度，不是零；初时边界角点有突变，需按内部初值理解。

数学物理方程篇·第二章 / 2.9

泊松方程与圆环完整例题

教材266—268页

2.9 · 教材266—268页

40 先消去源，再解拉普拉斯边值问题

设$\Delta u=f$、边界算子$Bu=g$。先找任意特解v使$\Delta v=f$，再令$u=v+w$，则

$$\Delta w=0,\qquad Bw=g-Bv.$$

多项式源常可待定系数：$f=C$在二维可取$v=Cr^2/4$；$f=12(x^2-y^2)$可取$v=x^4-y^4=r^4\cos2\theta$，因为$\Delta(x^4-y^4)=12(x^2-y^2)$。

特解不唯一，差一个调和函数仍可；只要新边界正确，总解相同。对于非零法向导数，Bv是导数，不能误写成v本身。

2.9 · 教材266—268页

41 原书圆环例题：边界变换的每一步都写出来

原题为$a<r<b$,

$$\Delta u=12(x^2-y^2),\qquad u(a,\theta)=1,\qquad u_r(b,\theta)=0.$$

外圆外法向是$+r$，所以此处$\partial_n=\partial_r$。取$v=r^4\cos 2\theta$、$u=v+w$，得

$$\Delta w=0,\quad w(a,\theta)=1-a^4\cos 2\theta,\quad w_r(b,\theta)=-4b^3\cos 2\theta.$$

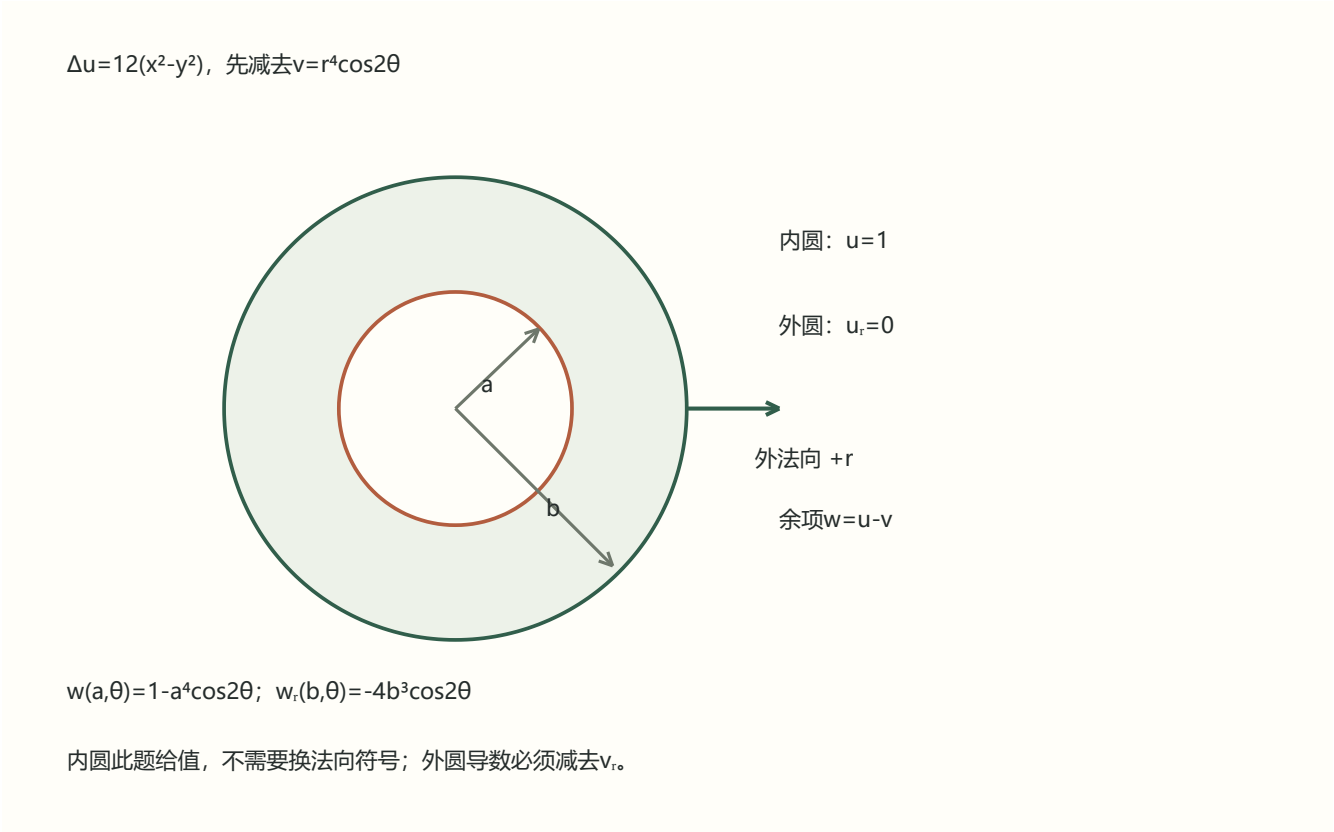
边界只含常数和二阶余弦，因此无需写所有角频率。设

$$w=A_0+B_0\ln r+(Ar^2+Br^{-2})\cos 2\theta.$$

零阶给$B_0/b=0$、$A_0+B_0\ln a=1$，所以$B_0=0,A_0=1$。二阶给

$$Aa^2+Ba^{-2}=-a^4,\qquad Ab-Bb^{-3}=-2b^3.$$

图 P2-17 圆环：内圆给函数值，外圆给径向导数



圆环内原点被挖去，余项可含r²与r⁻²；边界只含常数和cos2θ，无需保留全部角频率。

2.9 · 教材266—268页

42 解出两个系数，并用边界反查

解上一组方程，记$D=a^4+b^4$，有

$$A=-\frac{a^6+2b^6}{D},\qquad B=-\frac{a^4b^4(a^2-2b^2)}{D}.$$

故

$$u(r,\theta)=1+\left[r^4+Ar^2+Br^{-2}\right]\cos 2\theta.$$

验算三件事：①$r^{\pm 2}\cos 2\theta$调和，源只来自$r^4\cos 2\theta$；②括号在$r=a$为零；③径向导数$4r^3+2Ar-2Br^{-3}$在$r=b$为零。三个检查比重新读整段推导更能发现符号错误。

本题把原书2.2的圆环通解与2.4的齐次化接到一起。第一轮必须理解“特解改了边界”；两个系数的繁琐代数可按联立方程现场算，不必背最终分式。

数学物理方程篇·第二章 / 2.10

原书全部习题的路线与关键结果

教材268—271页

2.10 · 教材268—271页

43 习题1—2：空间特征值问题

题1(1) $X'(0)=0,X(l)=0$：余弦半整数谱，$\lambda_n=((n+1/2)\pi/l)^2$、$n\geq 0$。题1(2) $X'(0)=0,X'(l)+hX(l)=0$：用$\mu\sin\mu l-h\cos\mu l=0$求正根。题1(3) 左$X'(0)-kX(0)=0$、右$X'(l)+hX(l)=0$，$k,h>0$：

$$(kh-\mu^2)\sin\mu l+\mu(k+h)\cos\mu l=0,\quad X=\cos\mu x+\frac{k}{\mu}\sin\mu x.$$

这条方程只在$\mu>0$使用；$\mu=0$需单独代回，不能把消分母后出现的零当特征根。

题2(1) 就是2.4节的漂移例题：$X=e^{cx}\sin(n\pi x/l)$、$\lambda=c^2+(n\pi/l)^2$、权e^{-2cx}。题2(2) 三维径向$(r^2R')'+\lambda r^2R=0$：令$Y=rR$，有$Y''+\lambda Y=0$，有界性对应$Y(0)=0$，$R(a)=0$给$\lambda_n=(n\pi/a)^2$，$R_n=\sin(n\pi r/a)/r$，原点取极限$n\pi/a$；权r^2。题2(3) $X^{(4)}+\lambda X=0$、两端$X=X''=0$：分部积分两次得$-\lambda=\int(X'')^2/\int X^2>0$，所以$\lambda_n=-(n\pi/l)^4$、$X_n=\sin(n\pi x/l)$。这里的负号尤其容易被“特征值总非负”的错误记忆覆盖。

2.10 · 教材268—271页

44 习题3—4：弦初形与圆内有限角频率

题3 抛物线初形、零初速，已在2.2完整求解。检查偶数系数为零，奇数系数$32h/(n^3\pi^3)$。

题4 圆$r<a$狄利克雷问题，边界各小题对应：

原书小题	圆内解
(1) 常数A	$u=A$
(2) $A\cos\theta$	$u=A(r/a)\cos\theta$
(3) Axy	$u=Axy$，因为xy调和
(4) $\cos\theta\sin2\theta$	$u=\frac{1}{2}[(r/a)^3\sin3\theta+(r/a)\sin\theta]$
(5) $A\sin^2\theta+B\cos^2\theta$	$u=(A+B)/2+(B-A)(r/a)^2\cos2\theta/2$

先做三角恒等变形，把边界拆为角频率；不要把r直接替换成a后任意猜一个非调和函数。

2.10 · 教材268—271页

45 习题5：七种边界与方程变化分别动哪一步

(1) 左D右N波动，$u(0)=0,u_t(0)=x$。取$k_n=(n+1/2)\pi/l$、$\omega_n=ak_n$。初速系数$\psi_n=2(-1)^n/(lk_n^2)$，答案为$\sum\psi_n\sin\omega_nt\sin k_nx/\omega_n$，$n\ge0$。

(2) 两端零热传导，初温$x(l-x)$：系数$4l^2[1-(-1)^n]/(n^3\pi^3)$，时间因子$e^{-a^2(n\pi/l)^2t}$。

(3) 阻尼弦$u_{tt}=a^2u_{xx}-2hu_t$，原书$0<h<\pi a/l$保证全部欠阻尼。空间仍为整数正弦；$\beta_n=\sqrt{a^2k_n^2-h^2}$，

$$q_n=e^{-ht}\left[\varphi_n\cos\beta_nt+\frac{\psi_n+h\varphi_n}{\beta_n}\sin\beta_nt\right].$$

初速度里会多出$h\varphi_n$，不能仅给无阻尼答案乘e^{-ht}。

(4) 一端N、一端正Robin的波动：空间谱用2.6的根，时间改为$\cos a\mu_nt,\sin a\mu_nt$；系数分母仍是$N_n$。

(5) 圆内$u_r(a,\theta)-hu(a,\theta)=f(\theta)$，原书$h<0$。若$f=a_0/2+\sum(a_n\cos n\theta+b_n\sin n\theta)$，则

$$u=-\frac{a_0}{2h}+\sum_{n\ge1}\frac{(r/a)^n}{n/a-h}(a_n\cos n\theta+b_n\sin n\theta).$$

题设$h<0$确保分母不零。特别$f=\cos^2\theta$时，$u=-1/(2h)+(r/a)^2\cos2\theta/[2(2/a-h)]$。

(6) 圆环常数边界$u(a)=1,u(b)=0$：$u=\ln(b/r)/\ln(b/a)$。(7) 扇形：用2.3节角正弦和$r^{n\pi/\alpha}$公式。

2.10 · 教材268—271页

46 习题6—9：守恒奇异端点与高阶方程

题6 长$2l$绝热杆初温为中心宽$2A$、高$1/(2A)$的矩形，总积分为1。解为

$$u(t,x)=\frac{1}{2l}+\sum_{m\ge 1}\frac{(-1)^m\sin(m\pi A/l)}{Am\pi}e^{-a^2(m\pi/l)^2t}\cos\frac{m\pi x}{l}.$$

这里用了原来长度$2l$的偶数余弦模态，奇数模态系数零。长期趋$1/(2l)$。$A\to 0$时每项系数趋$(-1)^m/l$；对$t>0$形成集中初热量的平滑解，不能说初温函数一致趋于一个有限普通函数。

题7(1) 球内径向热传导：令$v=ru$，则$v_t=a^2v_{rr}$，$v(0)=v(R)=0$，初值$rf(r)$，最后除以r并在原点取极限。题7(2) 梁振动$u_{tt}=-a^2u_{xxxx}$、两端$u=u_{xx}=0$：空间$\sin k_nx$，角频率ak_n^2，并非ak_n；初位移$x(l-x)$的系数同题5(2)。

题8 半圆板，直径零温、圆弧$T\theta(\pi-\theta)$：角向正弦，只有奇数模态，系数$4T[1-(-1)^n]/(\pi n^3)$，乘$(r/a)^n\sin n\theta$。

题9 $u_{xx}-u_y=0$，要求$x\to+\infty$时解趋零。分离后可取$u=e^{-kx+k^2y}$，$k>0$。此题没有给完整定解条件，只求满足衰减条件的乘积解；不应虚构一组有限区间离散谱。

2.10 · 教材268—271页

47 习题10：非齐次问题先画出提升后的数据

(1) 左端恒温u_0、右端绝热：稳态$v=u_0$，余项左D右N，初温$\varphi-u_0$，用半整数正弦。

(2) 左端零温、右端$u_x=-q/k$，初温常数u_0：稳态$v=-qx/k$，余项左D右N，初温u_0+qx/k。长期趋$-qx/k$；正负来自题设导数，不能临时把q解释成另一个方向。

(3) 题中方程为$u_{xx}-u_t/a^2+Ae^{-2x}=0$，即$u_t=a^2u_{xx}+a^2Ae^{-2x}$。可取两端为零的稳态

$$v(x)=\frac{A}{4}\left[1-e^{-2x}-\frac{1-e^{-2l}}{l}x\right].$$

余项初温为T_0-v，按整数正弦衰减。注意源的a^2因子，不能漏。

(4) 外力$b\sinh x$的固定端弦：

$$f_n=\frac{2b(-1)^{n+1}k_n\sinh l}{l(1+k_n^2)},\qquad q_n=\frac{f_n}{\omega_n^2}(1-\cos\omega_nt).$$

(5) $u_{tt}=u_{xx}+g$，左位移零、右斜率E，初形Ex、初速零：取$v=(E+gl)x-gx^2/2$满足稳态和边界；余项左D右N、初形$-glx+gx^2/2$。

(6) 圆内$\Delta u=c_0+c_2(x^2-y^2)$、圆周常数$C$（将原书两个常数改记以免与半径混淆）：

$$u = C + \frac{c_0}{4}(r^2 - R^2) + \frac{c_2}{12}(r^4 - R^2 r^2)\cos 2\theta.$$

因为$\Delta(r^4\cos 2\theta) = 12r^2\cos 2\theta$，而$r^2\cos 2\theta$调和。

2.10 · 教材268—271页

48 习题11—12：圆环零模态与矩形双重展开

题11 $\Delta u = A$、$a < r < b$、边界常数数据，先取$v = Ar^2/4$，余项只需$C\ln r + D$。所以通解$u = Ar^2/4 + C\ln r + D$。两端给温度时联立两个值；外圆给$u_n(b) = u_2$时，用$Ab/2 + C/b = u_2$，再由内圆温度定D。

题12(1) 矩形泊松问题四边非零：先取关于x线性的提升$v = (1 - x/a)\varphi_1(y) + (x/a)\varphi_2(y)$，先消去左右边界；余项源变为$f - \Delta v$，上下边界也减$v$。可以再提升上下边界（需角点相容），或将余项分成有源零边界和两条单边非零的调和问题，分别展开。原书提示的“$Ax + B$”中A, B可以依赖y，不能误当两常数来拟合任意φ_1, φ_2。

题12(2) 矩形膜，初形$Axy(L_x - x)(L_y - y)$、初速零。双正弦系数

$$\varphi_{mn} = \frac{16AL_x^2L_y^2[1 - (-1)^m][1 - (-1)^n]}{m^3n^3\pi^6},$$

时间因子$\cos[a\sqrt{\lambda_{mn}}t]$。题12(3) 矩形热传导初温任意$\varphi(x, y)$：同一空间基，用$e^{-a^2\lambda_{mn}t}$；投影系数见2.6。

数学物理方程篇·第二章 / 2.11

做题顺序公式速查与掌握标准

全章237—271页

2.11 · 全章237—271页

49 先选空间基，再选时间方程

题目特征	先做什么	最容易错在哪里
有限区间两端零值	整数正弦谱	初速度忘除频率
两端零导数	常数 + 整数余弦谱	丢掉平均值零模态
一端值一端导数	半整数谱	抄成整数频率
正Robin边界	列连续特征方程、求根	用错模平方或除出假根

题目特征	先做什么	最容易错在哪里
变系数空间方程	先转自伴，确定权	不带权投影
圆内调和	角傅里叶、正径向幂	保留原点奇异项
圆环调和	正负径向幂及对数	删掉区域内合法的负幂
非零边界	构造提升$u = v + w$	漏改源、初值、导数初值
齐次边界有外力	展开外力、解模态ODE	漏共振或零模态

图 P2-18 先看区域和边界选空间基，再按时间方程选演化



表中的每一格都对应正文的一套可执行步骤；先辨认题型，再算系数。

2.11 · 全章237—271页

50 交卷前用四个问题验答案

①每个空间函数是否满足同一组齐次边界？②每个时间因子是否满足由原方程得到的ODE？③$t = 0$的位移和时间导数是否分别还原给定数据？④非齐次时，补回提升后是否恢复原方程和原边界？

再查三种特殊情况：零特征值、分母为零、角点不相容。长期极限可额外用守恒或稳态校验；例如两端绝热不能把总热量凭空衰减没了。

学到什么程度才可以往下走： 独立完成后面练习1—12，说明你掌握主干；能完成13—22，说明会处理权、Robin和非齐次；23—28用于连接原书综合题。完整谱定理证明、一般奇异端点分类可以暂缓，但不要跳过其适用条件。

数学物理方程篇·第二章 / 2.12

二十八道自编检查题与完整解析

独立编号不对应原书题号

2.12 · 独立编号不对应原书题号 · 自编检查题

练习1 分离时为什么是常数

设$u=XT$满足$u_t=\kappa u_{xx}$，写出分离后的两条ODE，并说明常数符号的作用。

展开解析

代入$XT'=\kappa X''T$，得$T'/(\kappa T)=X''/X=-\lambda$，故$X''+\lambda X=0$、$T'+\kappa\lambda T=0$。左右分别只依赖时间和空间，在乘积区域恒等因而为常数。选负号使常见边界的正特征值对应三角空间函数及热衰减，符号约定本身不代替谱的求解。

2.12 · 独立编号不对应原书题号 · 自编检查题

练习2 固定端谱要排除零解

求$X''+\lambda X=0$、$X(0)=X(\pi)=0$的全部特征值和特征函数。

展开解析

$\lambda=0$时线性函数两端零，只得零解；$\lambda<0$时双曲函数也只剩零解；$\lambda=\mu^2>0$时$X=B\sin\mu x$，要求$\sin\mu\pi=0$且$B\neq0$。故$\lambda_n=n^2, X_n=\sin nx, n\geq1$。$n=0$的正弦是零函数，不能列入。

2.12 · 独立编号不对应原书题号 · 自编检查题

练习3 混合端点改变频率

求$X''+\lambda X=0$、$X(0)=0, X'(\pi)=0$的谱。

展开解析

负值和零值均只给零解。正值时$X=B\sin\mu x$，$X'(\pi)=B\mu\cos\mu\pi=0$，所以$\mu=n+1/2$、$n\ge 0$。特征值$(n+1/2)^2$，特征函数$\sin[(n+1/2)x]$。区间右端不是零位移，不能用$\sin nx$。

2.12 · 独立编号不对应原书题号 · 自编检查题

练习4 初位移和初速度分别代入

解$u_{tt}=4u_{xx}$，$0<x<\pi$，两端固定，$u(0,x)=\sin x+2\sin 3x$、$u_t(0,x)=6\sin 2x$。

展开解析

$\omega_n=2n$。位移给$A_1=1, A_3=2$；速度给$B_2=6/4=3/2$。因此
$u=\cos 2t\sin x+2\cos 6t\sin 3x+(3/2)\sin 4t\sin 2x$。对最后一项求$t$导数并令零，得到$6\sin 2x$，检查通过。

2.12 · 独立编号不对应原书题号 · 自编检查题

练习5 抛物线的正弦系数

求$f(x)=x(1-x)$在$(0,1)$的正弦系数，并写出它作为零初速度固定端弦初形时的解，波速$a=1$。

展开解析

$f_n=2\int_0^1 x(1-x)\sin n\pi x\,dx=4[1-(-1)^n]/(n^3\pi^3)$，偶数为零、奇数为$8/(n^3\pi^3)$。故
$u=\sum_{n\ge1} f_n\cos(n\pi t)\sin(n\pi x)$。它的中点高度是$1/4$，不能把顶点高度$h=1$的系数误抄过来。

2.12 · 独立编号不对应原书题号 · 自编检查题

练习6 两个模态的节点与普通频率

长度$l=2$、波速$a=3$的固定端弦，第3模态内部节点在哪，角频率和普通频率分别多少?

展开解析

$X_3=\sin(3\pi x/2)$，节点$x=0,2/3,4/3,2$，内部两个节点。$\omega_3=3\pi a/l=9\pi/2$，普通频率$\nu_3=\omega_3/(2\pi)=9/4$。若长度和速度分别以米、米每秒计，普通频率单位为Hz。

2.12 · 独立编号不对应原书题号 · 自编检查题

练习7 热方程不是余弦时间因子

解$u_t=2u_{xx}$，$0<x<\pi$，两端零温，初温$3\sin x-\sin 4x$。

展开解析

$u=3e^{-2t}\sin x-e^{-32t}\sin 4x$，因为特征值分别为1、16，衰减率为$\kappa\lambda$。若写$\cos 2t$，就误用了二阶时间波动方程。长期趋零。

2.12 · 独立编号不对应原书题号 · 自编检查题

练习8 绝热杆的长期平均值

解$u_t=u_{xx}$，$0<x<\pi$，$u_x(t,0)=u_x(t,\pi)=0$，初温$2+3\cos x-\cos 2x$。

展开解析

$u=2+3e^{-t}\cos x-e^{-4t}\cos 2x$。常数对应$\lambda_0=0$，不衰减。长期趋2，且$\int_0^\pi u\,dx=2\pi$不变。

2.12 · 独立编号不对应原书题号 · 自编检查题

练习9 零模态的波动行为

解$u_{tt}=u_{xx}$，两端零斜率，初位移恒为3，初速度恒为2。

展开解析

只激发空间常数模态。其时间方程$T''=0$，由初值得$u=3+2t$。不能把零频率强代进$\sin\omega t/\omega$而留下未定义的分式；也可用其极限t，但应说明。

2.12 · 独立编号不对应原书题号 · 自编检查题

练习10 圆内调和的有限和

半径$R=2$圆内有界调和函数，边界为$1+4\cos 2\theta-3\sin 3\theta$，求解及中心值。

展开解析

$u=1+4(r/2)^2\cos 2\theta-3(r/2)^3\sin 3\theta$。在$r=2$恢复边界，各项调和；中心值1，是边界平均值。不能把r^2直接乘4而不除半径平方。

2.12 · 独立编号不对应原书题号 · 自编检查题

练习11 圆环为什么需要对数

求$\Delta u=0$、$1<r<e^2$，$u(1)=5$、$u(e^2)=1$的径向解。

展开解析

径向方程$(ru_r)'=0$，所以$u=A+B\ln r$。由$r=1$得$A=5$，由$r=e^2$得$B=-2$，故$u=5-2\ln r$。原点不在区域内，不能因对数在原点发散而删掉它。

2.12 · 独立编号不对应原书题号 · 自编检查题

练习12 扇形角频率

四分之一圆$0<r<1, 0<\theta<\pi/2$，两直边零值，圆弧值$\sin 2\theta + 2\sin 6\theta$，求原点有界调和解。

展开解析

角向允许$\sin(2n\theta)$，故给定边界是$n=1$和$n=3$两个模态。对应径向正幂r^2, r^6，所以
$u = r^2\sin 2\theta + 2r^6\sin 6\theta$。原点有界、两条直边零、外弧恢复数据。

2.12 · 独立编号不对应原书题号 · 自编检查题

练习13 指数权必须放进系数公式

求$X''-4X'+\lambda X=0$、$0<x<\pi$、两端零的谱和权；展开$f=e^{2x}\sin 3x$。

展开解析

令$X=e^{2x}Y$，得到$Y''+(\lambda-4)Y=0$。所以$\lambda_n=4+n^2, X_n=e^{2x}\sin nx$，权$\rho=e^{-4x}$。$N_n=\pi/2$，投影$f_n=(2/\pi)\int_0^\pi e^{-4x}fX_n dx=\delta_{n3}$。这已经是一项展开，漏权将破坏正交筛选。

2.12 · 独立编号不对应原书题号 · 自编检查题

练习14 对数坐标与带权模平方

求$X''+X'/x+\lambda X/x^2=0$于$1<x<e^2$、两端零的谱，及N_n，取权$1/x$。

展开解析

令$s=\ln x$，区间长度为2，方程$Y_{ss}+\lambda Y=0$。故$\lambda_n=(n\pi/2)^2$、$X_n=\sin[(n\pi/2)\ln x]$。
$N_n=\int_1^{e^2}X_n^2 dx/x=\int_0^2\sin^2(n\pi s/2)ds=1$。别把原书$(1,e)$的频率直接照搬。

2.12 · 独立编号不对应原书题号 · 自编检查题

练习15 Robin根与模平方

求$X''+\lambda X=0$、$0<x<1$、$X'(0)=0, X'(1)+X(1)=0$的根方程、首根所在区间及模平方表达。

展开解析

$X=\cos\mu x$，$\mu\tan\mu=1$。首根位于$(0,\pi/2)$，约$\mu_1=0.860333589$。$\lambda_1=\mu_1^2$。
$N_n=\int_0^1\cos^2\mu_n x\,dx=\frac{1}{2}[1+1/(\mu_n^2+1)]$。零值时$X=A+Bx$，左端给$B=0$、右端给$A=0$，所以零不是特征值。

2.12 · 独立编号不对应原书题号 · 自编检查题

练习16 周期边界可以有重特征值

求$X''+\lambda X=0$、$X(0)=X(2\pi), X'(0)=X'(2\pi)$的实谱，并说明正交性证明的限制。

展开解析

$\lambda_0=0$对应常数；$\lambda_n=n^2$、$n\geq 1$对应两个独立函数$\cos nx, \sin nx$。不同特征值由自伴恒等式保证正交；同一特征值的正交不能仅从$\lambda_m-\lambda_n$那一步推出。这一对可直接积分验证正交，也可在重特征空间内选正交基。

2.12 · 独立编号不对应原书题号 · 自编检查题

练习17 稳定受迫热模态

解$u_t=u_{xx}+2e^{-3t}\sin x$，$0<x<\pi$，两端零、初温零。

展开解析

只需$u=q(t)\sin x$，$q'+q=2e^{-3t}$、$q(0)=0$。积分得$q=e^{-t}-e^{-3t}$，所以$u=(e^{-t}-e^{-3t})\sin x$。代回：$q'+q=2e^{-3t}$，初值零。

2.12 · 独立编号不对应原书题号 · 自编检查题

练习18 两个指数相等

把上一题的源改为$2e^{-t}\sin x$，求解，解释为何不能保留零分母。

展开解析

方程$q'+q=2e^{-t}$，积分因子e^{t}给$(e^{t}q)'=2$，故$q=2te^{-t}$，$u=2te^{-t}\sin x$。一般指数差商在参数相等时的极限正是这个式子，原问题并无奇异。

2.12 · 独立编号不对应原书题号 · 自编检查题

练习19 波动共振

解$u_{tt}=u_{xx}+4\cos 2t\sin 2x$，$0<x<\pi$，两端固定且零初值。

展开解析

$u=q\sin 2x$，$q''+4q=4\cos 2t$，共振频率$\omega=2$。零初值解$q=t\sin 2t$，因此$u=t\sin 2t\sin 2x$。检查$q''+4q=4\cos 2t$；若写成除以$4-4$的分式，就是未处理共振。

2.12 · 独立编号不对应原书题号 · 自编检查题

练习20 常热源的稳态与余项

解$u_t=u_{xx}+2$，$0<x<1$，两端零、初温零，给出稳态和级数解。

展开解析

稳态$v=x(1-x)$满足$v''+2=0$。令$u=v+w$，则$w_t=w_{xx}$、两端零、$w(0)=-x(1-x)$。故

$$u=x(1-x)-\sum_{n\ge 1}\frac{4[1-(-1)^n]}{n^3\pi^3}e^{-n^2\pi^2 t}\sin n\pi x.$$

长期趋$x(1-x)$。稳态虽不满足初值，余项正是用来补齐初值的。

2.12 · 独立编号不对应原书题号 · 自编检查题

练习21 时间边界提升要改哪些数据

设$u_{tt}=a^2u_{xx}$、左端零、右端$g(t)$，原初值φ,ψ。取$v=xg(t)/l$，完整写出$w=u-v$的问题。

展开解析

$$w_{tt}=a^2w_{xx}-\frac{x}{l}g''(t),\quad w(t,0)=w(t,l)=0,$$

$$w(0,x)=\varphi(x)-\frac{x}{l}g(0),\quad w_t(0,x)=\psi(x)-\frac{x}{l}g'(0).$$

边界、源、两条初值都要处理。若$g=\sin\Omega t$，新源为$+\Omega^2x\sin\Omega t/l$，初速减$\Omega x/l$，符号与正文一致。

2.12 · 独立编号不对应原书题号 · 自编检查题

练习22 非零恒温边界

解$u_t=u_{xx}$、$0<x<1$，$u(t,0)=0,u(t,1)=1$，初温$u(0,x)=x+\sin\pi x$。

展开解析

取稳态$v=x$，余项初温$\sin\pi x$，所以$u=x+e^{-\pi^2t}\sin\pi x$。长期趋x。原初温已经在两端匹配，角点没有值的冲突。

2.12 · 独立编号不对应原书题号 · 自编检查题

练习23 泊松圆内问题

求单位圆内$\Delta u=8$、边界$u(1,\theta)=3+\cos2\theta$的有界解。

展开解析

取$v=2r^2$，有$\Delta v=8$。余项边界为$1+\cos2\theta$，故$w=1+r^2\cos2\theta$，总解$u=1+2r^2+r^2\cos2\theta$。边界为$3+\cos2\theta$，其中二阶角模态调和。

2.12 · 独立编号不对应原书题号 · 自编检查题

练习24 圆环常源加混合边界

求$\Delta u=4$、$1<r<2$、$u(1)=0, u_r(2)=0$的径向解。

展开解析

通解$u=r^2+C\ln r+D$。由$u_r(2)=4+C/2=0$得$C=-8$，内边界给$D=-1$。故$u=r^2-8\ln r-1$。验算$u_{rr}+u_r/r=4$、$u(1)=0$、$u_r(2)=0$。

2.12 · 独立编号不对应原书题号 · 自编检查题

练习25 长方体只给一个横向模态

单位立方体内调和，除顶面$z=1$外五面为零，顶面为$2\sin\pi x\sin 2\pi y$，求解。

展开解析

横向$(m,n)=(1,2)$，$\gamma=\pi\sqrt{5}$。因此

$$u=2\frac{\sinh(\pi\sqrt{5}z)}{\sinh(\pi\sqrt{5})}\sin\pi x\sin 2\pi y.$$

横向拉普拉斯给$-5\pi^2u$，z二阶导给$+5\pi^2u$，合为零。$z=0$和四侧为零，顶面恢复给定值。

2.12 · 独立编号不对应原书题号 · 自编检查题

练习26 矩形膜的频率不是两个频率相加

解$u_{tt}=4(u_{xx}+u_{yy})$于$0<x<\pi, 0<y<\pi$，四边固定，初形$\sin x\sin 2y$、初速零。

展开解析

特征值$1^2+2^2=5$，角频率$2\sqrt{5}$，故$u=\cos(2\sqrt{5}t)\sin x\sin 2y$。两个方向的波数先平方相加再开方，不是$2(1+2)$。

2.12 · 独立编号不对应原书题号 · 自编检查题

练习27 阻尼模态的初速度

解$q''+2q'+10q=0$，$q(0)=2, q'(0)=3$，指出直接给无阻尼解乘e^{-t}为何不对。

展开解析

特征根$-1\pm 3i$，所以$q=e^{-t}(C\cos 3t+D\sin 3t)$。$C=2$，$q'(0)=-C+3D=3$，得$D=5/3$。答案$e^{-t}(2\cos 3t+\frac{5}{3}\sin 3t)$。多出的衰减因子求导会贡献$-C$，因此初速度对应的正弦系数必须修正。

2.12 · 独立编号不对应原书题号 · 自编检查题

练习28 球内径向特征函数在原点不必为零

求$(r^2R')'+\lambda r^2R=0$、$0<r<1$、$R(1)=0$、R在原点有界的谱及权。

展开解析

令$Y=rR$，方程化为$Y''+\lambda Y=0$。有界性给$Y(0)=0$，外边界$Y(1)=0$。所以$\lambda_n=n^2\pi^2$、$R_n(r)=\sin(n\pi r)/r$，原点以极限定义$R_n(0)=n\pi$，而非零。自伴形式的权为r^2，模平方$\int_0^1 r^2R_n^2dr=1/2$。奇异的是表达式的表面形式，允许分支在原点的极限有限。

来源、编排与掌握要求

依据用户提供的严镇军《数学物理方法》扫描本数学物理方程篇·第二章整理；正文印刷页237—268上部，章末习题268—271。扫描PDF文件页序等于印刷页码加6。按原书节序覆盖各主题，以重新讲解、推导主线和例题说明组织，未逐字复制原文。自编检查题与原书习题分开编号，原书题号可在本章习题路线中查找；本文件不声称是全部原书习题的逐题答案册。

第一轮优先掌握能独立做题所需的概念、步骤和适用条件；背景、证明及拓展均说明用途和暂缓深究的边界。数学物理方程篇·第二章含28道自编检查题及完整解析。公式与SVG内嵌，可离线阅读；屏幕答案默认折叠，打印时自动展开。整理日期：2026年10月22日。