数学物理方法 / 数学物理方程篇

数学物理方程篇·第五章学习讲义

基本解和解的积分表达式

δ抽样 → 单点响应 → 格林函数与镜像 → 热核 → 波动核 → 降维与传播 → 推迟势。按教材顺序展开概念、例题、证明主线与解题条件；附章末全部12个大题的解法与结果，以及自编检查题。

严镇军教材配套讲读　　教材325—374页　　36道自编检查题　　离线SVG公式与图解

这一章不是再塞进一堆互不相干的公式。它只做一件事：**先回答“在一个点放一个单位扰动，会发生什么”，再用叠加求任意分布的扰动**。δ负责描述“单位点扰动”，基本解负责描述“响应”，积分负责把各点的响应加起来。

按教材第325—374页的顺序展开，包含§5.1、§5.2的四个小节、§5.3和§5.4的四个小节。为方便学习，本讲义再拆为16节。所有解释、图解与检查题均重新编写；第5.15节对应原书章末全部12个大题及其小题。第5.16节提供本书学习收尾用的训练与自检。

第一轮必须掌握： δ抽样与缩放；基本解和格林函数的定义；三种积分项分别接收什么数据；半空间镜像；热核；一维达朗贝尔、三维球面平均、二维圆盘积分；有限传播和推迟时间。**第二轮再补：** 挖小球的严格证明、三重傅里叶积分的每一行、一般分布的拓扑定义。它们有理论用途，但不应挡住你先把标准题做对。

本章是原书正文的最后一章。读完文件，只表示有了完整学习材料；真正的完成标准，是合上讲义仍能识别题型、写出核、代入数据并核查条件。

学习顺序：先跟着例题写关键步骤，再独立完成检查题，最后按习题路线回到原书。证明段落均说明用途，不要求第一轮逐行背诵。

本章目录

5.1 先理解点源再认识δ	教材§5.1，第325—328页
5.2 δ的运算逐条推出来	教材§5.1，第328—331页
5.3 多维δ和有限区间的点源展开	教材§5.1末，第330—334页
5.4 静态基本解是算子的点源响应	教材§5.2.1，第334—336页
5.5 格林函数把边界和源一起装进解	教材§5.2.2，第336—341页
5.6 三维镜像法从平面做到球	教材§5.2.3，第341—346页
5.7 二维对数核与矩形谱展开	教材§5.2.4，第346—352页
5.8 一阶时间方程与热核的通用公式	教材§5.3，第352—357页
5.9 热核题从积分走到可检查的结果	教材§5.3应用与本讲义补充
5.10 二阶时间方程先分清两个初值	教材§5.4.1，第357—362页
5.11 三维波核与球面平均	教材§5.4.1例1，第359—362页
5.12 降维法与二维波动	教材§5.4.2，第362—365页
5.13 传播范围与有无后效	教材带星号§5.4.3，第365—370页
5.14 推迟势是空间距离换成时间延迟	教材§5.4.4，第371—372页
5.15 原书章末12个大题逐项解题	教材习题，第372—374页
5.16 最后八题与全书学习收尾	本章综合训练与掌握标准

数学物理方程篇·第五章 / 5.1

先理解点源再认识δ

教材§5.1，第325—328页

5.1 · 教材§5.1，第325—328页

01 整章地图：源、核、积分各做一件事

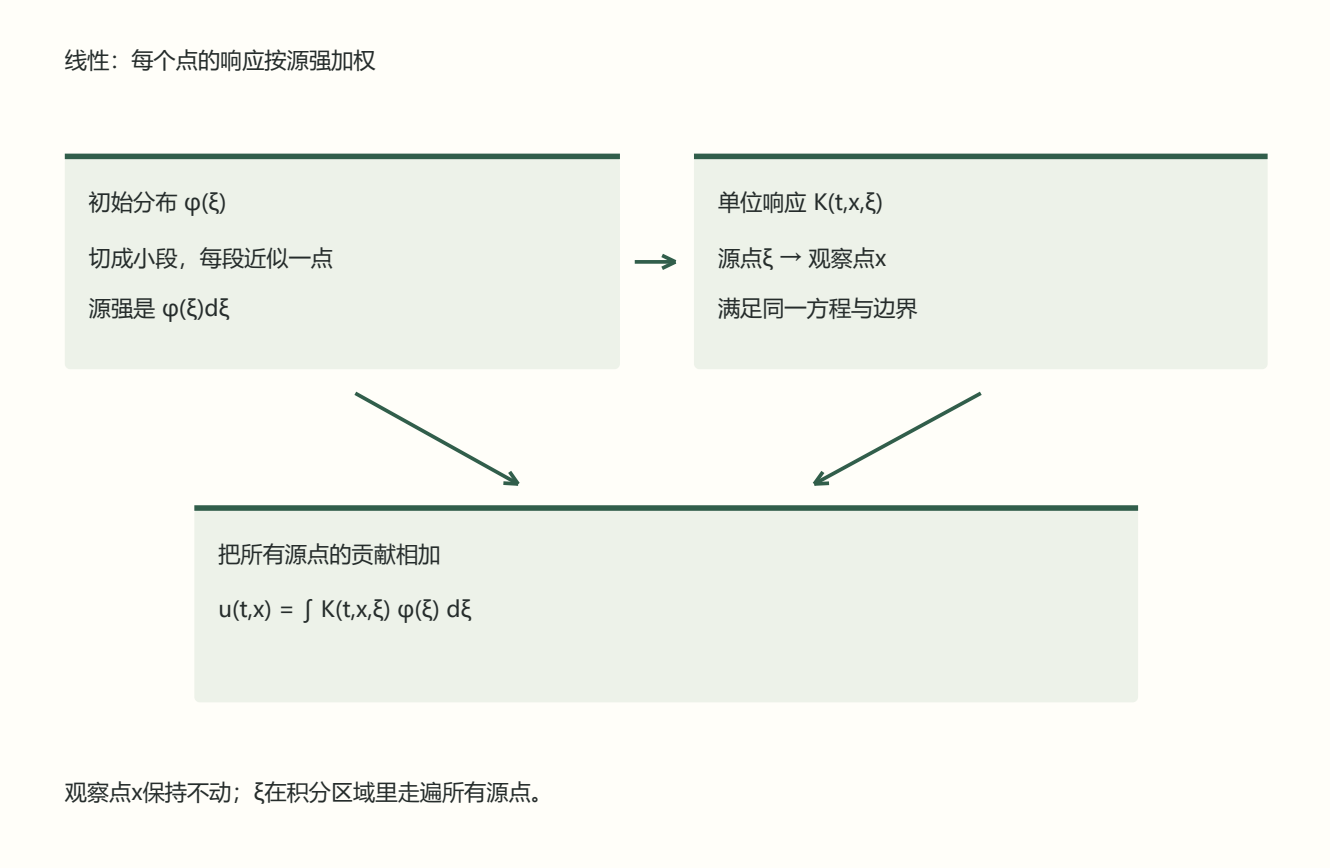
先想一个最朴素的问题：如果知道一滴墨水在水中怎样散开，能不能预测一整条墨线怎样散开？在线性模型中，可以。把墨线切成许多小段，每段近似一个点源，把它们的影响加起来；小段无限细，就得到积分。

数学上，把观察点写作 x，源点写作 ξ。$K(t,x,\xi)$ 表示“在 ξ 放一个单位扰动，过了 t 后，在 x 测得的响应”。初始分布为 $\varphi(\xi)$ 时，小段贡献是 $K(t,x,\xi)\varphi(\xi)\,d\xi$，于是

$$u(t,x)=\int K(t,x,\xi)\varphi(\xi)\,d\xi.$$

这里不是把 K 当万能黑箱：它必须满足同一个方程以及相应的边界条件。全空间常系数问题的核常只依赖 $x-\xi$，才能简写成卷积。有限区域一般要保留两个空间变量。

图 P5-1 把分布拆成点源，再把每份响应相加



有边界时K通常依赖x和ξ两点；全空间常系数情形才常简写成x−ξ。

做到什么程度： 看到积分要能指出谁是观察点、谁是积分变量、谁是已知数据、谁是核。暂时不用背任何三维积分公式。

5.1 · 教材§5.1，第325—328页

02 为什么“零点以外为零”还不够定义δ

普通函数如果只在一个点非零，通常积分仍是零。单位点质量却要求总质量是1。因此，不能把“$\delta(0)=\infty$，其余为零”当作普通函数的精确定义。真正可用于计算的定义是它对光滑测试函数的作用：

$$\int_{\mathbb{R}} \delta(x-\xi) f(x)\,dx = f(\xi).$$

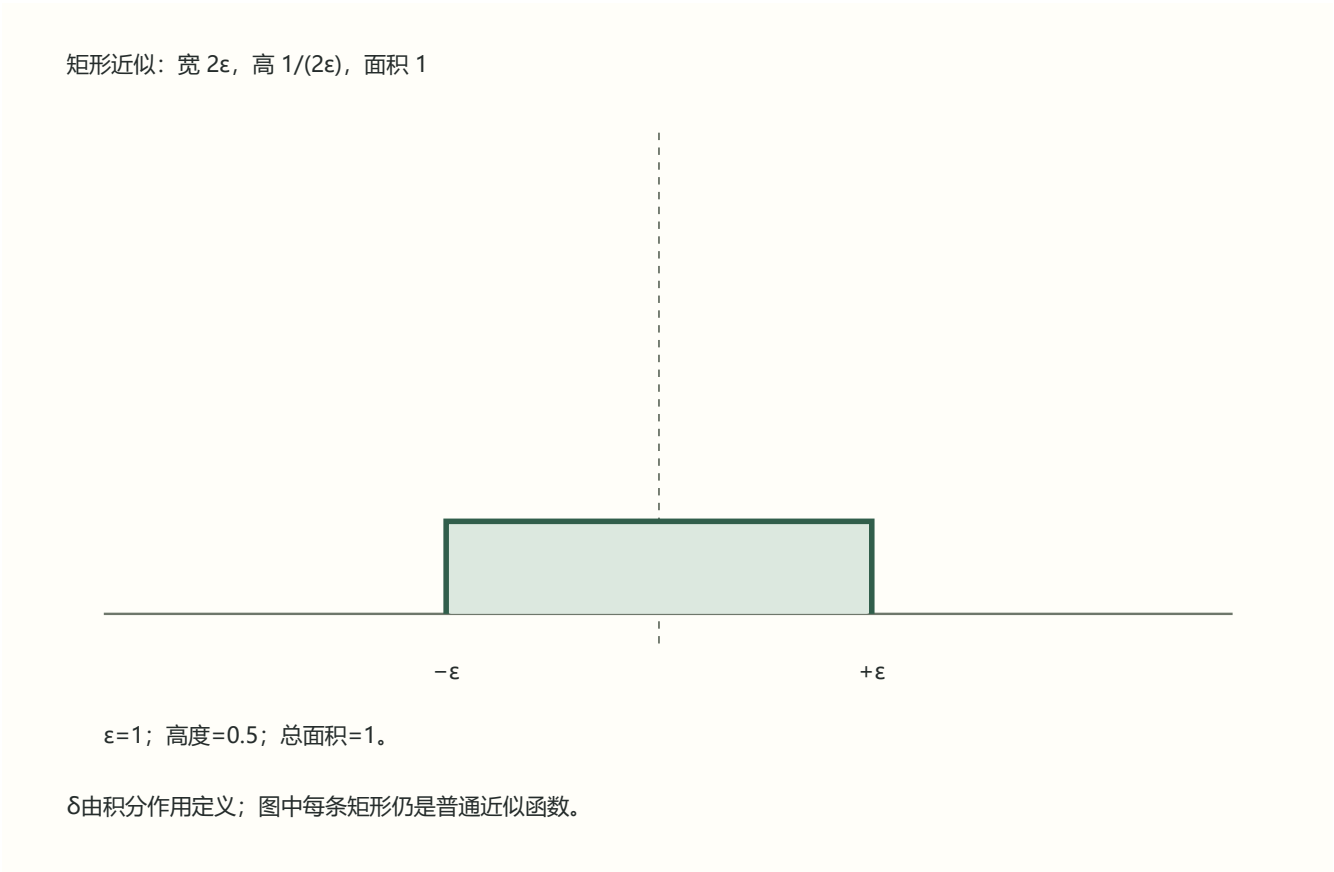
这是**抽样性质**：把 f 在源点的值取出来。严格理论中写成 $\langle \delta_\xi, f\rangle = f(\xi)$，测试函数通常取光滑且具有紧支集的函数。你现在只需把δ看成“放进积分后执行抽样的对象”。

用宽度 2ε、高度 $1/(2\varepsilon)$ 的矩形近似：

$$\rho_\varepsilon(x)=\begin{cases}(2\varepsilon)^{-1}, & |x|<\varepsilon,\\ 0, & |x|\ge\varepsilon.\end{cases}$$

它的面积始终为1；当 $\varepsilon \to 0$ 时，$\int \rho_\varepsilon(x) f(x) dx \to f(0)$。这是**积分意义下**趋向δ，不是给δ规定一个普通函数的点值。高斯窄峰也能做同一件事。

图 P5-2 δ近似越窄越高，面积始终为1



图示 宽度参数 ε=1；让ε趋零，积分对连续测试函数取出f(0)，不是逐点得到一个无限高的普通函数。

必须避免： 把δ的“高度”代入常规四则运算、计算 $\delta(0)^2$、随意约掉δ。一般分布之间的乘法并没有自动定义。

5.1 · 教材§5.1，第325—328页

03 点质量、点热量、瞬时冲量怎么写

总质量 m 集中在 $x=\xi$，线密度写成 $m\delta(x-\xi)$。因为对任意包含该点的区间积分得到 m。集中热量 Q 放进均匀细杆，若横截面积 A、密度 ρ、比热 c，温度初值满足

$$c\rho A \int u(0,x)\,dx = Q,$$

所以

$$u(0,x) = \frac{Q}{c\rho A}\delta(x-\xi).$$

δ前的系数不能只凭“单位点源”四个字猜。先写守恒量，再确定系数。教材把某些热量取为 $c\rho$，并取单位截面积，才使初温恰为δ。

力在 $t=t_0$ 给物体一个冲量 J，则写 $F(t)=J\delta(t-t_0)$。把 $mv_t=F$ 跨过 t_0 积分，可得 $m[v(t_0+)-v(t_0-)]=J$。δ描述的是有限的总冲量，不能理解成“无限大力持续普通时间”。

做题用途： 把题目中的“集中在一点”“瞬时作用”“总量为某数”翻译成正确的初值或源项。空间δ与时间δ的积分变量不同，不要混用。

5.1 · 教材§5.1，第325—328页

04 抽样前先检查根在哪里

$$\int_0^3 (1+x^2)\delta(x-2)\,dx = 5.$$

因为源点2在积分区间内部。若改成 $\delta(x-4)$，结果是0。如果根恰落在端点，必须交代端点约定；对称正则化常产生半权重，但这不是所有单边定义都自动遵循的规则。本讲义没有声明约定时，抽样公式均取根严格位于区间内部。

不要漏掉积分测度的单位：$\delta(x)$ 的量纲是长度的倒数，使 $\delta(x)dx$ 无量纲；三维δ的量纲是长度的负三次方。

5.1 · 教材§5.1，第325—328页 · 自编检查题

练习1 用总热量确定δ前的系数

均匀无限杆的 $c\rho A=6$，在 $x=2$ 瞬时输入热量18。写出温度初值，并计算 $\int x^2u(0,x)dx$。

展开解析

由 $6\int u(0,x)dx=18$，得 $u(0,x)=3\delta(x-2)$。第二个积分抽样得到 $3\times 2^2=12$。先确定总量，再抽样，顺序不能倒过来。

5.1 · 教材§5.1，第325—328页 · 自编检查题

练习2 δ是否真的等于一个无限高的函数

矩形近似的宽度减为原来的一半，高度和面积怎样变？这是否给出了δ在0点的普通函数值？

展开解析

高度变为两倍，面积仍为1。它给出的是对测试函数积分的极限，不能给出一个普通实数或“无限实数”作为δ的点值。记住面积和抽样作用即可。

数学物理方程篇·第五章 / 5.2

δ的运算逐条推出来

教材§5.1，第328—331页

5.2 · 教材§5.1，第328—331页

05 平移、偶性、卷积单位元

源点从0移到 a，写成 $\delta(x-a)$。把 $\delta(x-a)$ 换成 $\delta(a-x)$ 不改变作用，因为δ关于自己的中心对称。与光滑函数相乘时有

$$f(x)\delta(x-a)=f(a)\delta(x-a).$$

证明只需两边乘任意测试函数 h 后积分，均得到 $f(a)h(a)$。这叫分布相等，并不是比较它们每个点的数值。

卷积则给出

$$\delta*f=f,\qquad \delta(x-a)*f(x)=f(x-a).$$

第二个式子请自己写成积分验证：$\int\delta(x-\xi-a)f(\xi)d\xi=f(x-a)$。**用途：** 初值为δ时，卷积公式直接留下核本身；证明初值恢复时，δ把 $K(0)*\varphi$ 还原成 φ。

5.2 · 教材§5.1，第328—331页

06 缩放公式：为什么一定有绝对值

对 $a\neq 0$,

$$\delta(ax-b)=\frac{1}{|a|}\delta\left(x-\frac{b}{a}\right).$$

换元 $s=ax-b$ 后，积分测度提供 $1/|a|$。若 $a<0$，积分上下限也反向；总量不能变成负数，所以这里必须是绝对值。

更一般地，g 在各零点 x_j 附近光滑且 $g'(x_j)\neq 0$，则

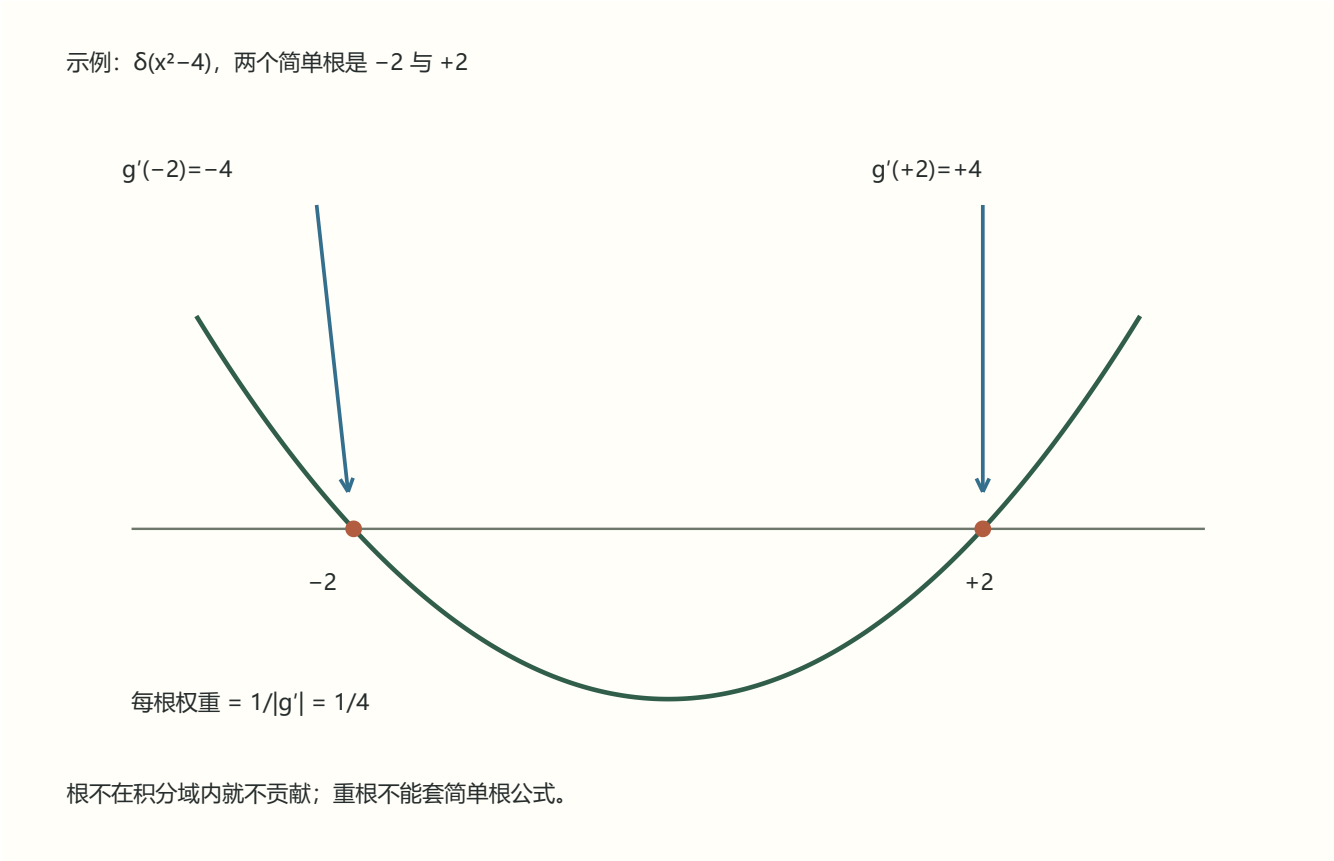
$$\delta(g(x))=\sum_j \frac{\delta(x-x_j)}{|g'(x_j)|}.$$

例如

$$\delta(x^2-4)=\frac{1}{4}\delta(x-2)+\frac{1}{4}\delta(x+2).$$

流程： 解根 → 检查哪些根在积分域 → 每根除以导数绝对值 → 代入被抽样函数。$\delta(x^2)$ 在0处是重根，不能硬套该公式。

图 P5-3 复合δ先找简单根，再除以导数绝对值



完整流程：解根，筛选区间，除以导数绝对值，再抽样。

5.2 · 教材§5.1，第328—331页

07 δ的导数：负号从分部积分来

导数的定义是

$$\int \delta'(x-a)f(x)dx = -f'(a),$$

更一般地

$$\int \delta^{(n)}(x-a)f(x)dx = (-1)^n f^{(n)}(a).$$

它保留了分部积分规则。考试最常见错误是把导数也当成普通抽样，漏掉负号。例如 $\int \delta'(x-1)e^{2x}dx = -2e^2$。

两个重要恒等式：

$$x\delta(x) = 0, \qquad x\delta'(x) = -\delta(x).$$

第二个式子对测试函数 h 的作用为 $-(xh)'|_0 = -h(0)$。更一般地，

$$f(x)\delta'(x-a) = f(a)\delta'(x-a) - f'(a)\delta(x-a).$$

注意区分 $\delta'(-x)$ 和 $\frac{d}{dx}\delta(-x)$：前者是δ导函数在负自变量处的拉回，等于 $-\delta'(x)$；后者还要乘链式法则的 -1，所以等于 $\delta'(x)$。

5.2 · 教材§5.1，第328—331页

08 傅里叶表示不是一个普通收敛积分

沿用上一章约定：

$$\widehat{f}(k) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{ikx}dx, \qquad f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(k)e^{-ikx}dk.$$

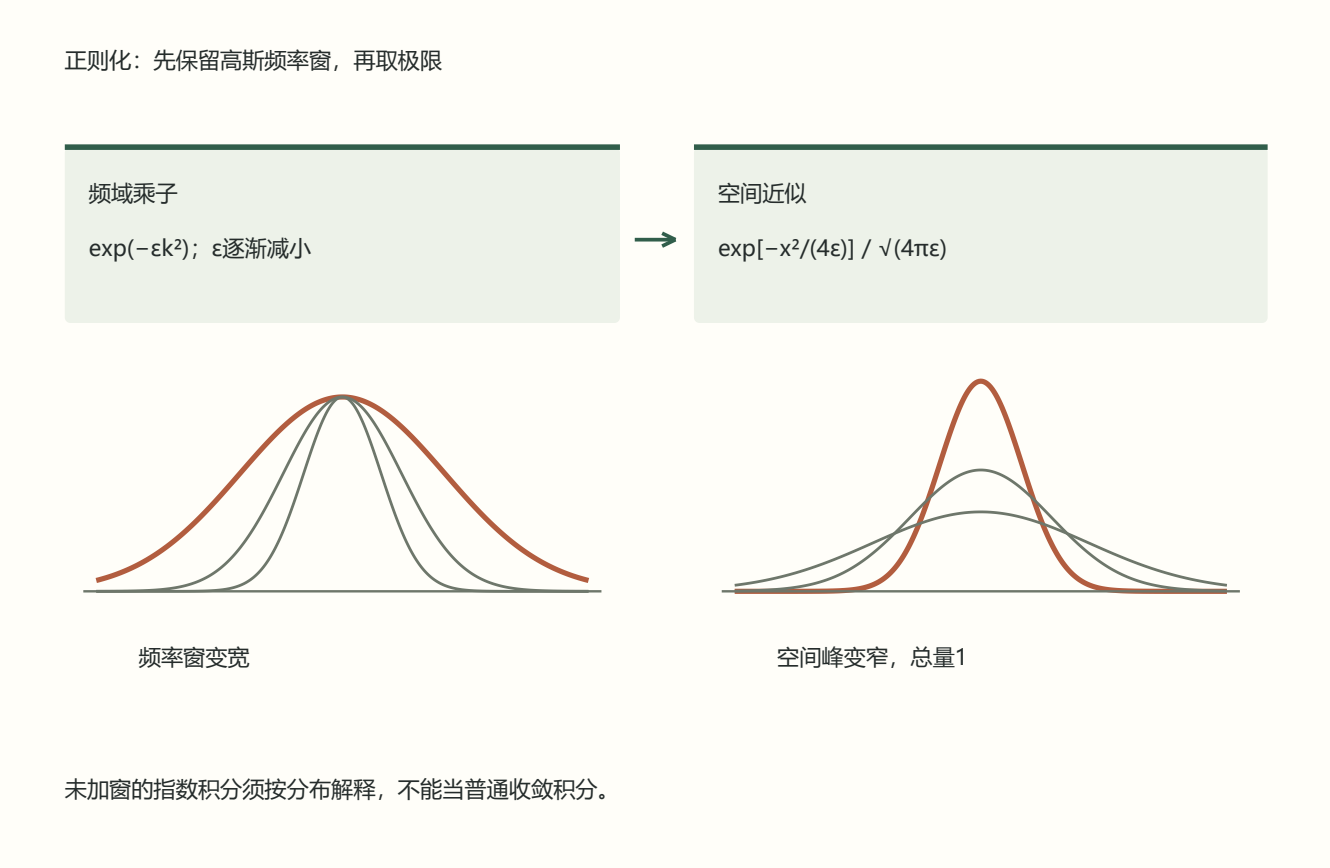
那么 $\hat{\delta} = 1$，形式上写作

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{-ikx}dk.$$

这个积分不是逐点收敛的普通积分。可以先截断为 $[-R,R]$，得到 $\sin(Rx)/(\pi x)$，再在测试函数积分意义下取极限。另一种方式是乘上 $e^{-\varepsilon k^2}$，得到归一化高斯，再令 $\varepsilon \to 0+$。

为何要讲： 后面把 $\hat{\delta}=1$ 代入变换后的方程，才有最简单的初值；三维波核中的δ也由这种形式出现。第一轮不要求你证明分布空间中的收敛定理，但必须知道不能随意交换这些振荡积分。

图 P5-4 频域高斯截断对应空间中的单位窄峰



橙色示较小ε；越接近频域常数1，空间越接近δ。

5.2 · 教材§5.1，第328—331页 · 自编检查题

练习3 同一题里同时检查根和雅可比

计算 $\int_{-3}^{3}(x+3)\delta(x^2-4)dx$，以及 $\int_{0}^{3}(x+3)\delta(x^2-4)dx$。

展开解析

根为 ± 2，导数绝对值均为4。第一个积分为 $(5+1)/4=3/2$；第二个只保留正根，等于 $5/4$。不能先把负根忽略，再去看区间。

5.2 · 教材§5.1，第328—331页 · 自编检查题

练习4 δ导数与乘积

计算 $\int (x^2+1)\delta'(x-2)dx$，并把 $x\delta'(x-2)$ 化成以2为中心的δ及其导数。

展开解析

积分为 $-(2x)|_{x=2}=-4$。乘积恒等式给出 $x\delta'(x-2)=2\delta'(x-2)-\delta(x-2)$。再对测试函数作用可检查两边均为 $-2h'(2)-h(2)$。

数学物理方程篇·第五章 / 5.3

多维δ和有限区间的点源展开

教材§5.1末，第330—334页

5.3 · 教材§5.1末，第330—334页

09 多维δ先和体积元一起看

二维点源写成 $\delta(x-\xi)\delta(y-\eta)$，三维再乘 $\delta(z-\zeta)$。简记 $\delta(M-M_0)$，其中 M 是空间点。抽样为

$$\int_V \delta(M-M_0)f(M)\,dV = f(M_0), \qquad M_0\in V.$$

光滑可逆换元 $X=X(q)$ 后，在源点 q_0 附近有

$$\delta(X(q)-X(q_0)) = \frac{\delta(q-q_0)}{|\det DX(q_0)|}.$$

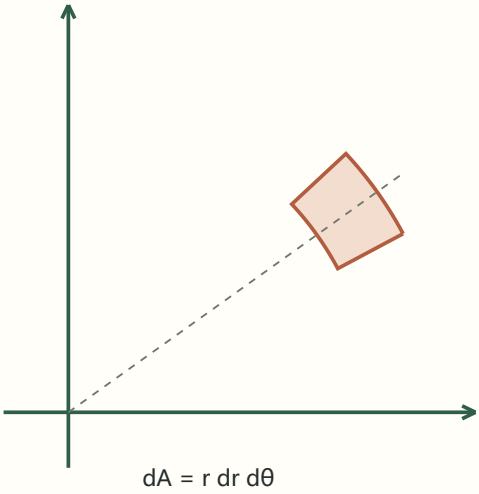
这和体积元 $dX=|\det DX|dq$ 正好抵消。极坐标且源点 $r_0>0$ 时，可在角坐标的局部图中写

$$\delta(x-x_0)\delta(y-y_0) = \frac{1}{r_0}\delta(r-r_0)\delta(\theta-\theta_0).$$

写 $1/r$ 也等价，因为δ把它取在 r_0。角变量按周期理解，不能把同一点重复计数。原点没有唯一角坐标，此式不能直接拿 $r_0=0$ 代入；旋转对称的二维原点δ可用径向表示并结合 $rdrd\theta$ 理解。

图 P5-5 极坐标面积元与δ中的雅可比互相抵消

点源强度不能随着坐标系统而改变



δ中的倒数因子

δ二维 → δ径向δ角向/r₀

在源点 r=r₀ 抽样

乘 dA 后因子抵消

本图取 r₀>0；极点没有唯一角坐标。

δ不是普通密度数值；它必须连同积分测度一起换元。

小扇区的面积由半径r产生雅可比；点源分布中相应出现倒数。

5.3 · 教材§5.1末，第330—334页

10 正交展开中，δ把系数积分变成函数值

设边界条件对应的一组实特征函数为 X_n，范数平方为 $N_n=\int_0^L X_n^2dx$。在分布意义下，

$$\delta(x-\xi)=\sum_n \frac{X_n(\xi)X_n(x)}{N_n}.$$

你已经会算普通函数的傅里叶系数：$c_n=\int fX_n/N_n$。现在令 $f=\delta(x-\xi)$，抽样后只剩 $X_n(\xi)/N_n$。这就是基本解与分离变量法的接头处。

两端温度固定为0用正弦；两端绝热用余弦，**并保留常数模态**。对区间 $(0,L)$，绝热δ展开为

$$\delta(x-\xi)=\frac{1}{L}+\frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\cos\frac{n\pi\xi}{L}\cos\frac{n\pi x}{L}.$$

这里“等于”不能理解为在 $x=\xi$ 逐点求和得到一个普通数。

5.3 · 教材§5.1末，第330—334页

11 教材的中点加热杆，完整走一遍

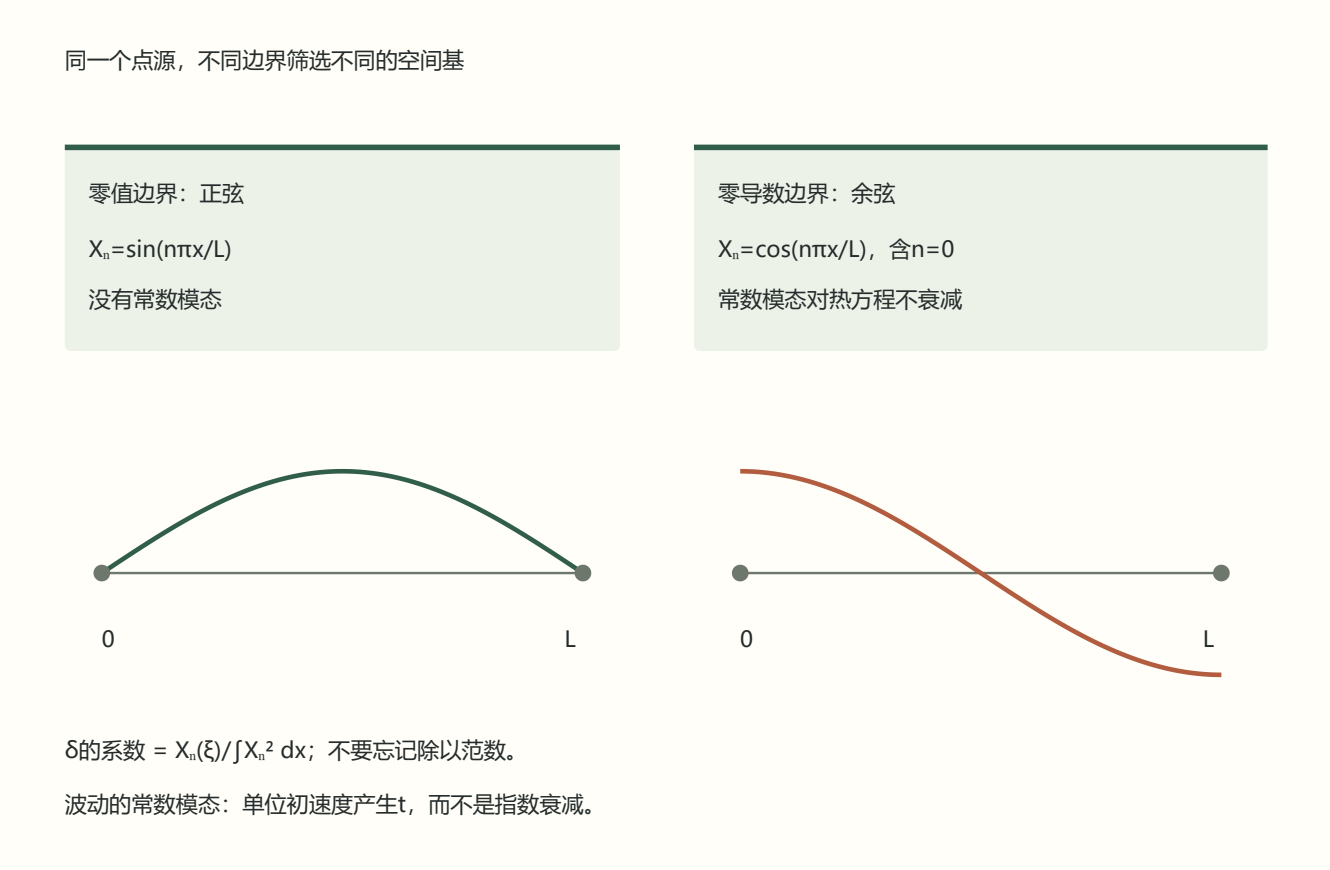
杆长 $2l$，两端绝热，初温 $\delta(x-l)$。空间特征函数为 $\cos(n\pi x/(2l))$。常数项系数 $1/(2l)$；非零模态系数为 $l^{-1}\cos(n\pi/2)$。奇数模态消失，偶数 $n=2k$ 给出 $(-1)^k/l$。所以

$$u(t,x)=\frac{1}{2l}+\frac{1}{l}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k e^{-(k\pi a/l)^2 t}\cos\frac{k\pi x}{l}.$$

这是温度方程 $u_t=a^2u_{xx}$ 的解。逐项积分，余弦项为0，故总积分始终为1；$t\to\infty$ 后只有 $1/(2l)$ 留下。你可以同时检查总热量和最终均温。

必须掌握： 常数项为什么不衰减，δ怎样产生特征系数。无需把这个特定中点公式当成新公式背。

图 P5-6 边界决定正弦或余弦，绝热必须保留零模态



示意n=1模态。右图端点斜率为0，不要求端点函数值为0。

5.3 · 教材§5.1末，第330—334页

12 教材的正弦振荡积分其实是在找延迟

教材例5在 $at>x>0$ 时计算含 $\sin(\lambda x)\sin(a\lambda(t-\tau))$ 的二重积分。核心恒等式是

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \sin(\lambda x)\sin(\lambda s)d\lambda = \delta(x-s)-\delta(x+s).$$

取 $s=a(t-\tau)$；在 $0<\tau<t$ 且 $x>0$ 时，第二个δ没有根。余下 $\delta(x-a(t-\tau))$，根为 $\tau=t-x/a$，雅可比为 $1/a$。因此教材前置系数为 a 的积分，结果就是 $f(t-x/a)$。

意义： 不需要硬算振荡积分；它把输入延迟了传播时间 x/a。若 $t<x/a$，根在积分域外，响应为0。交换积分应通过正则化解释，不能把不收敛的普通积分直接用绝对收敛定理处理。

5.3 · 教材§5.1末，第330—334页 · 自编检查题

练习5 一维区间δ的正弦系数

两端固定温度的 $(0,L)$ 杆，初温为 $2\delta(x-L/3)$。写出温度的特征级数。

展开解析

正弦范数平方为 $L/2$，系数为 $4\sin(n\pi/3)/L$。故 $u(t,x)=\frac{4}{L}\sum_{n\ge1}\sin(n\pi/3)\sin(n\pi x/L)e^{-a^2(n\pi/L)^2t}$。没有常数模态；热可由两端流失，不能要求总热量一直守恒。

5.3 · 教材§5.1末，第330—334页 · 自编检查题

练习6 多维δ的换元

设 $x=2s, y=3q$。把原点二维δ写成 s,q 中的形式，并检验其总量。

展开解析

雅可比绝对值是6，所以 $\delta(2s)\delta(3q)=\delta(s)\delta(q)/6$。乘体积元 $dxdy=6dsdq$ 后总积分为1。单独变δ、不变面积元，是错误来源。

数学物理方程篇·第五章 / 5.4

静态基本解是算子的点源响应

教材§5.2.1，第334—336页

5.4 · 教材§5.2.1，第334—336页

13 先写定义，再分清两个符号约定

设 L 是常系数线性空间微分算子。它的基本解 Γ 满足

$$L\Gamma = \delta.$$

于是 $Lu = f$ 的一个特解为 $u_p = \Gamma * f$，因为 $L(\Gamma * f) = (L\Gamma) * f = \delta * f = f$。它只保证方程，并不自动满足指定边界；还可能加任意齐次解。因此“求到基本解”不等于“解完任意边值问题”。

本章格林函数沿用教材另一个约定：$\Delta G = -\delta$，配上零狄利克雷边界。请在纸上固定下面这张表：

对象	定义	三维奇异部分
拉普拉斯算子的基本解 Γ	$\Delta\Gamma = \delta$	$-1/(4\pi r)$
本讲义的狄利克雷格林函数 G	$\Delta G = -\delta$，边界为0	$+1/(4\pi r)$

若别的教材把 $-\Delta$ 当算子或让 $\Delta G = +\delta$，相应公式会换符号。**考试先写定义，比孤立背一个正负号可靠。**

图 P5-7 本章的基本解和格林函数采用不同源符号

先看定义右端的正负号，再写核

算子Δ的基本解 Γ

ΔΓ = +δ

三维 Γ = −1/(4πr)

用来解 Δu=F：Γ*F

本章格林函数 G

ΔG = −δ，边界为0

三维奇异部分 +1/(4πr)

用来解 Δu=−f：源项 +∫Gf

同一个拉普拉斯，右端换号，核也换号。

二维对应：Γ=ln r/(2π)；G的奇异部分=−ln r/(2π)。

其他教材可以选择不同约定；只要定义和表示公式成套一致。

5.4 · 教材§5.2.1，第334—336页

14 三维为什么是负的1除以4πr

源点以外应满足 $\Delta\Gamma = 0$。径向函数满足 $\Gamma'' + 2\Gamma'/r = 0$，解为 $A + B/r$。取无穷远衰减的形式 B/r，再对包含原点的小球积分：

$$1 = \int_{B_\varepsilon} \Delta\Gamma \, dV = \int_{\partial B_\varepsilon} \partial_r \Gamma \, dS = -4\pi B.$$

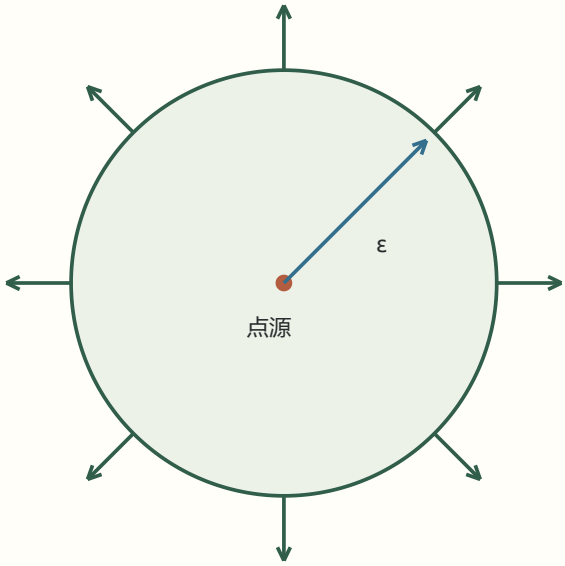
因此 $B = -1/(4\pi)$。也就是

$$\Gamma_3(x) = -\frac{1}{4\pi|x|}, \qquad \Delta\Gamma_3 = \delta_3.$$

计算 $r > 0$ 的拉普拉斯只能得到0，不会看见原点的δ。必须补上小球通量，才能定出源强和符号。这里的小球外法向朝径向外；若在“挖掉小球”的区域上用格林公式，小球内边界的区域外法向反而朝向球心。

图 P5-8 点源强度由小球总通量定出

三维：球面面积 4πε² × 径向导数



对 Γ=C/r

$\partial_r\Gamma=-C/\varepsilon^2$

总通量=−4πC

若源是+δ，C=−1/(4π)

只算源点以外的ΔΓ=0，无法确定点源强度。

挖孔区域的内边界外法向朝球心，与本图方向相反。

本图画的是完整小球自身的外法向，通量归一化决定系数与符号。

5.4 · 教材§5.2.1，第334—336页

15 傅里叶求法：把微分算子换成一个多项式

对全空间方程做空间傅里叶变换，$\widehat{\Delta u}=-|k|^2\hat{u}$，$\hat{\delta}=1$，所以形式上

$$\widehat{\Gamma}(k)=-\frac{1}{|k|^2}.$$

逆变换、用球坐标积分，就得到上一单元的结果。这段教材计算要传达的不是三重积分有多长，而是：**常系数微分算子在频域中变成乘法，基本解由其符号的倒数产生。**

遇到分母的零点时，逆变换的解释可能需要额外条件；不能对所有 L 都不加说明地写“除完就唯一”。例如亥姆霍兹方程还涉及辐射条件。第一轮掌握频域方程、符号与归一化，球坐标积分的机械步骤可放第二轮。

5.4 · 教材§5.2.1，第334—336页

16 用一个径向源检验符号

求球 $r<R$ 内 $\Delta u=-q$、$u(R)=0$ 的正则径向解，q 为常数。由 $(r^2u_r)'=-qr^2$，原点正则排除 $1/r$ 项，得到

$$u(r)=\frac{q}{6}(R^2-r^2).$$

当 $q>0$，内部为正，符合 G 为正且源积分 $\int Gq$ 为正的直觉。若公式算出整个球内负值，先检查你到底在解 $\Delta u=q$ 还是 $\Delta u=-q$。

5.4 · 教材§5.2.1，第334—336页 · 自编检查题

练习7 基本解与齐次解

若 $\Delta\Gamma=\delta$，光滑函数 h 满足 $\Delta h=0$，那么 $\Gamma+h$ 还是基本解吗？这能说明边界条件可省略吗？

展开解析

还是，因为 $\Delta(\Gamma+h)=\delta$。这恰好说明基本解本身未必唯一，边界或无穷远条件仍要用来确定具体解。不能把“是基本解”误当成“是该题唯一解”。

5.4 · 教材§5.2.1，第334—336页 · 自编检查题

练习8 通量检查三维系数

候选核 C/r 满足 $\Delta(C/r)=-\delta$。用小球通量求 C。

展开解析

通量为 $-4\pi C$，应等于 -1，所以 $C=1/(4\pi)$。若目标改成 $+\delta$，则 $C=-1/(4\pi)$。这一步能在没有查表时重建符号。

数学物理方程篇·第五章 / 5.5

格林函数把边界和源一起装进解

教材§5.2.2，第336—341页

5.5 · 教材§5.2.2，第336—341页

17 格林函数比全空间基本解多做了什么

区域为 V，边界为 S。对固定源点 $\xi \in V$，定义

$$\Delta_x G(x,\xi) = -\delta(x-\xi), \qquad G(x,\xi) = 0 \quad (x \in S).$$

把它拆成 $G = 1/(4\pi|x-\xi|) + H$。第一项负责源点的奇异性；H 在整个区域内调和，负责把边界值抵消成0。H 的边界值恰为 $-1/(4\pi|x-\xi|)$。

因此，求格林函数是在做一件非常具体的事：**保留区域内唯一的单位点源，用一个没有内部新源的修正满足边界**。 镜像法就是用区域外的虚拟点源构造这个调和修正。虚拟点源若落进区域，会给方程添上不该有的δ。

5.5 · 教材§5.2.2，第336—341页

18 第二格林公式：只保留本章要用的一行

对足够光滑的 u, v，散度定理给出

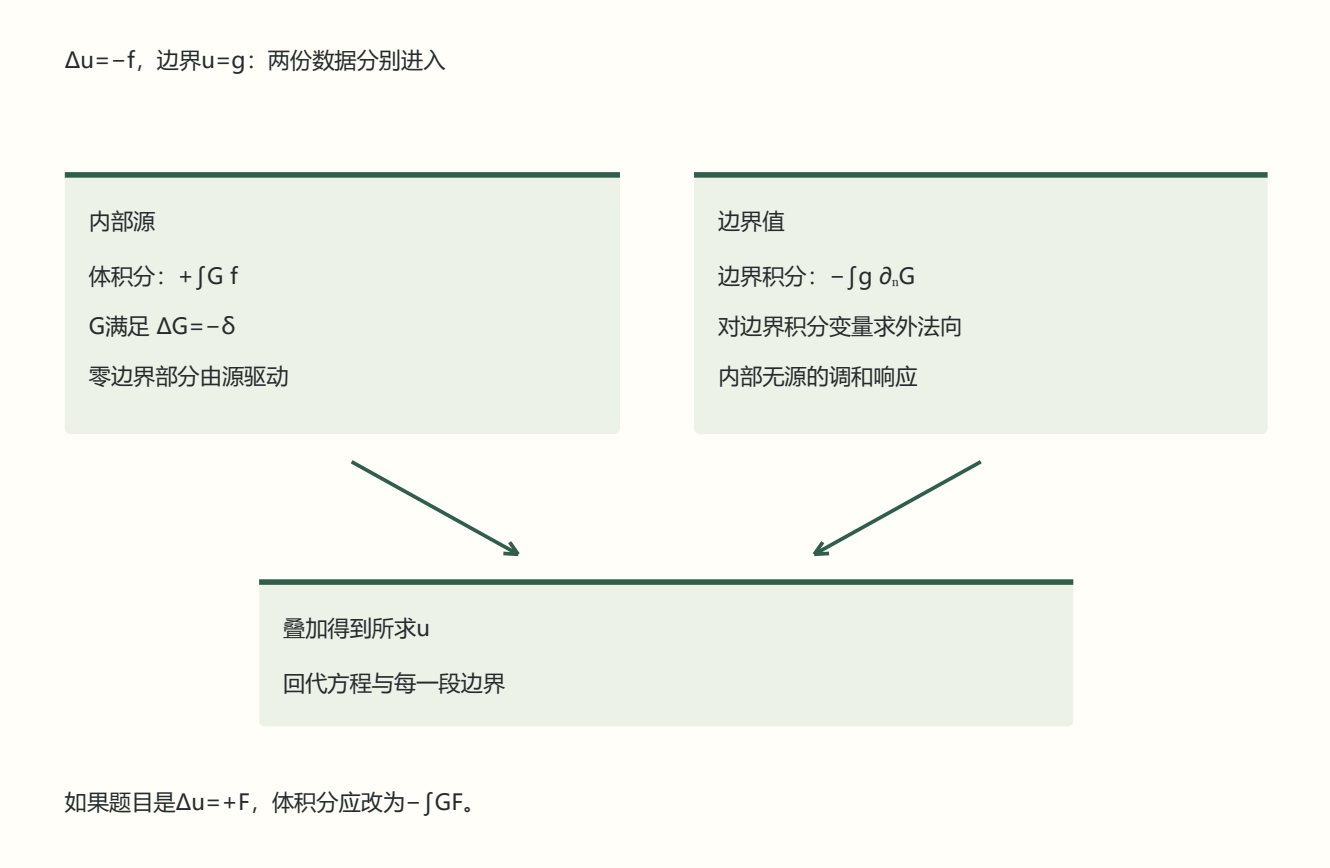
$$\int_V (u\Delta v - v\Delta u)dV = \int_S (u\partial_n v - v\partial_n u)dS.$$

这里 n 是区域**外法向**，$\partial_n = n\cdot\nabla$。令 $v = G$，考虑 $\Delta u = -f$、$u|_S = g$。左边成为 $-u(x) + \int_V Gf$；右边因 $G|_S = 0$，只留下 $\int_S g\partial_n G$。移项得到

$$u(x) = \int_V G(x,\xi) f(\xi) d\xi - \int_S g(\xi)\partial_{n_\xi} G(x,\xi) dS_\xi.$$

这就是本章静态题的主公式。 第一项接收内部源 f；第二项接收给定的边界值 g。法向导数对边界积分变量 ξ 求，不是随手对观察点 x 求。

图 P5-9 内部源与边界值从不同入口组成解



格林函数本身边界为0；边界数据通过它的法向导数进入解。

严格证明中，G 在源点不光滑，不能直接把它塞进只适用于处处光滑函数的定理。可先挖掉半径 ε 的小球，在剩余区域应用公式，再令 $\varepsilon \to 0$；也可使用分布理论。**为什么讲这一点：** 解释“δ从哪里进公式”和内边界符号；第一轮不要求逐行证明极限估计。

5.5 · 教材§5.2.2，第336—341页

19 对称性是静态自伴问题的互易性

同一个狄利克雷拉普拉斯问题满足 $G(x,\xi) = G(\xi,x)$。证明主线是对两个源点的格林函数应用第二格林公式：两者都在边界为0，边界项消失；内部两个δ各抽样一次，得到交换点位后的相等。

用处一： 核的表达式虽然长，交换观察点和源点后应不变，可用于验算。**用处二：** 在表示公式中调换变量时不会换成另一个核。

不要把这个结论扩展为“所有有时间的核都在时间上对称”。因果热核、推迟波核只允许过去影响未来。空间算子若非自伴，也通常要引入伴随核，不能照搬这里的互易性。

5.5 · 教材§5.2.2，第336—341页

20 做格林函数题的四项检查

1. 内部方程：除了真实源点外是否调和；源点强度是否为 $-\delta$。
2. 边界：把每一段边界代入，G 是否为0。
3. 位置：所有虚拟源是否都在区域外。
4. 解的条件：外部或无界区域是否还满足要求的衰减、增长或有界性条件。

若边界给的是法向导数，不能直接使用上面的零狄利克雷格林函数公式。在有界纯诺伊曼问题中还存在常数零模态，并需满足通量与源的相容条件。这里强调它，是为了防止你一见“格林函数”就不看边界类型。

5.5 · 教材§5.2.2，第336—341页 · 自编检查题

练习9 从表示公式核对源的符号

已知 $\Delta G=-\delta$、$G|_S=0$。若题目给的是 $\Delta u=F$、$u|_S=g$，写解的表示式。

展开解析

令上一公式的 $f=-F$，得 $u=-\int_V GF-\int_S g\partial_n G$。可以对体积分施加拉普拉斯检验：$\Delta(-\int GF)=F$。不要只改边界项或只凭记忆判断。

5.5 · 教材§5.2.2，第336—341页 · 自编检查题

练习10 外法向朝哪边

区域为上半空间 $z>0$，在平面 $z=0$ 上 ∂_n 等于 ∂_z 还是 $-\partial_z$？若挖去一个小球，小球边界的区域外法向朝哪里？

展开解析

上半空间的外面在下方，故 $\partial_n=-\partial_z$。挖孔后，小球内部属于区域外面，所以孔壁的区域外法向朝球心，与小球自身的径向外法向相反。

数学物理方程篇·第五章 / 5.6

三维镜像法从平面做到球

教材§5.2.3，第341—346页

5.6 · 教材§5.2.3，第341—346页

21 半空间：异号镜像用来消去边界值

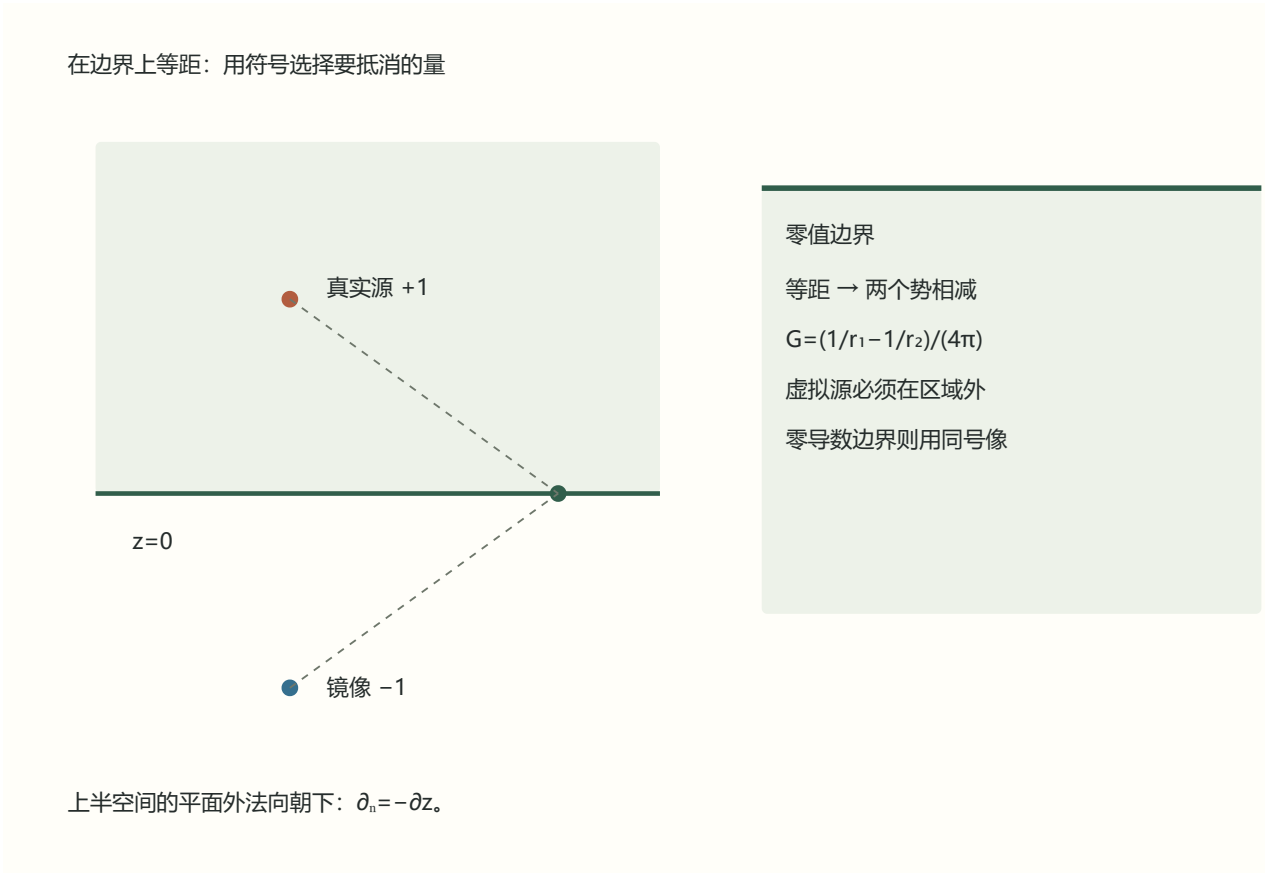
取 $V=\{z>0\}$，源点 $\xi=(\xi_1,\xi_2,h)$，$h>0$，镜像点 $\xi^*=(\xi_1,\xi_2,-h)$。定义 $r_1=|x-\xi|$、$r_2=|x-\xi^*|$，则

$$G(x,\xi)=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right).$$

在 $z=0$ 上两距离相同，所以边界值为0。镜像点在下半空间，所以它在研究区域内没有新增δ。真实源前的正号满足 $\Delta G=-\delta$。

若要零法向导数，常用同号镜像，让法向导数相消。但那是另一种边界条件，不能把“镜像总是异号”当口诀。这里的全空间点势还应结合无穷远行为，选取符合所求问题的核。

图 P5-10 零值边界用异号像，零导数边界用同号像



左图取垂直截面。两条虚线等长，异号势在平面上抵消。

5.6 · 教材§5.2.3，第341—346页

22 半空间泊松核：边界积分中的负号变成正核

对观察点 $x=(x_1,x_2,z)$，$z>0$，边界点记作 $(s_1,s_2,0)$。由外法向 $-e_z$ 及镜像核求导，得到

$$-\partial_{n_\xi}G=\frac{z}{2\pi\left[(x_1-s_1)^2+(x_2-s_2)^2+z^2\right]^{3/2}}.$$

因此 $\Delta u=0$、$u|_{z=0}=g$ 的解为该正核与 g 的平面积分。先试 $g\equiv 1$：核的积分应为1。极坐标检验为

$$\int_0^\infty \frac{z\rho}{(\rho^2+z^2)^{3/2}}\,d\rho=1.$$

做到什么程度： 会从镜像写出 G，会沿正确法向求导，能用常数边界检查归一化。半空间泊松核不是二维上半平面的 $z/[\pi(s^2+z^2)]$，维数改变了分母指数。

5.6 · 教材§5.2.3，第341—346页

23 球内镜像的位置不是普通反射

球半径 R，源点 ξ 距球心 $\rho=|\xi|$，$0<\rho<R$。反演点和权重分别为

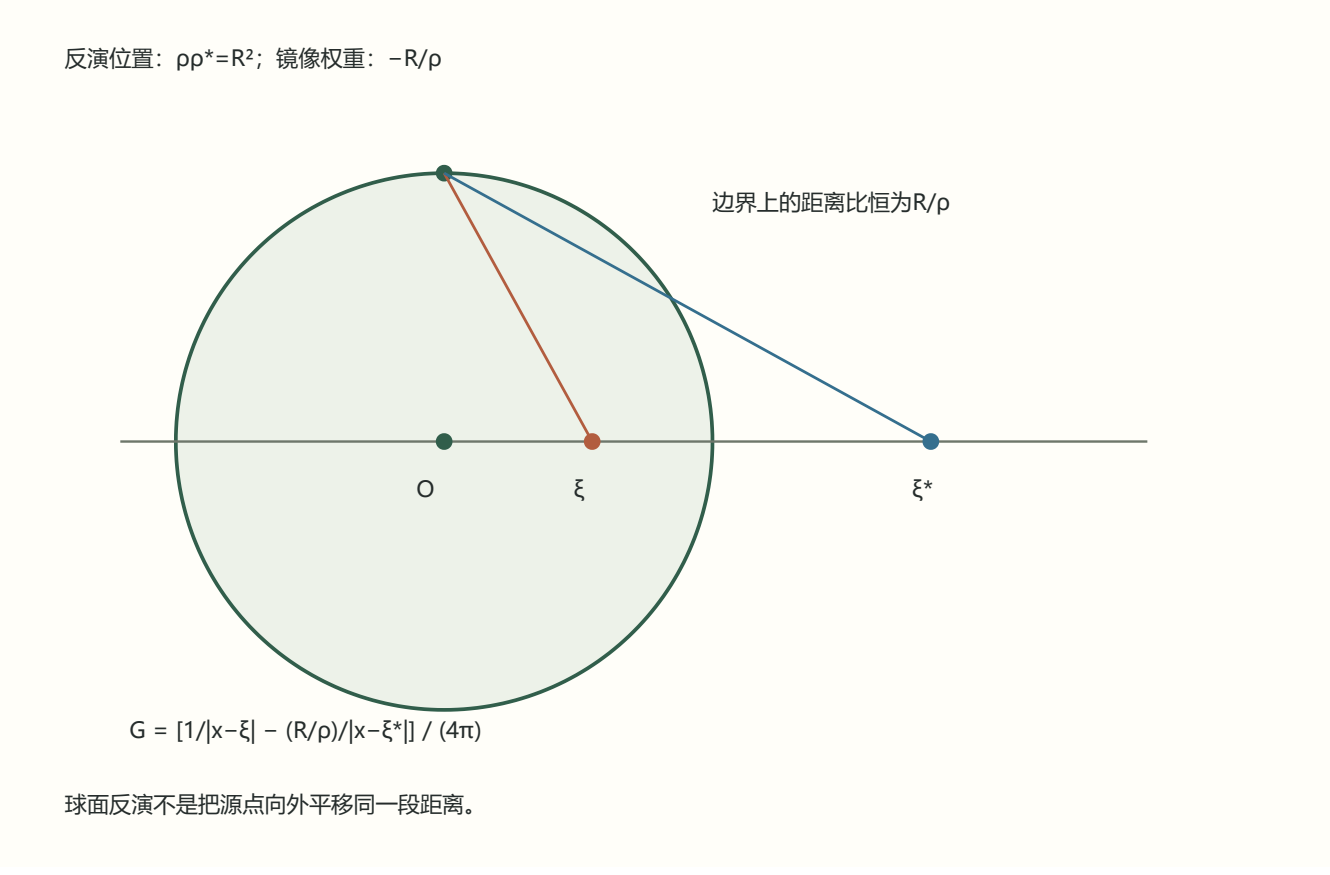
$$\xi^*=\frac{R^2}{\rho^2}\xi,\qquad q=\frac{R}{\rho}.$$

格林函数为

$$G_B(x,\xi)=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{|x-\xi|}-\frac{R}{\rho}\frac{1}{|x-\xi^*|}\right).$$

在 $|x|=R$ 上，$|x-\xi^*|=(R/\rho)|x-\xi|$，所以两项抵消。**距离反演和电量权重缺一不可。** 球心源点 $\rho=0$ 不能直接代入发散的反演坐标，要取极限，得到 $G_B(x,0)=(1/|x|-1/R)/(4\pi)$。

图 P5-11 球面镜像同时改变位置和权重



图取ρ<R，反演点在球外。源在球心时取极限，不能直接除以ρ=0。

5.6 · 教材§5.2.3，第341—346页

24 球内泊松公式与球心平均值

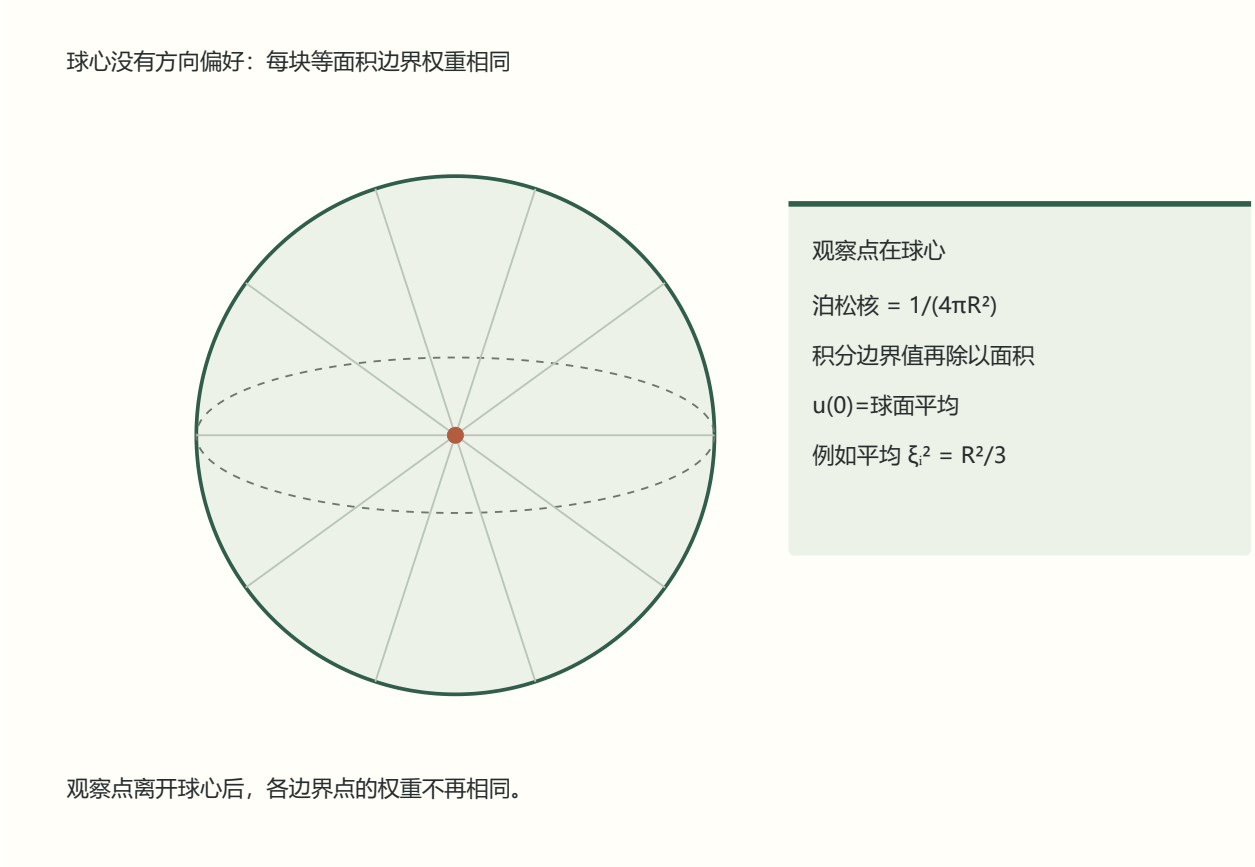
对 $|x|<R$、边界点 $\xi\in\partial B_R$，

$$u(x)=\int_{\partial B_R}\frac{R^2-|x|^2}{4\pi R|x-\xi|^3}g(\xi)dS_\xi.$$

在球心，分子为 R^2、距离为 R，核为 $1/(4\pi R^2)$。所以球心的调和值等于球面边界值的面积平均。这是前面球谐展开得到的结果，在这里从格林函数重新出现。

例如边界给 $g(\xi)=A+B\xi_3$，无需做面积分：$A+Bx_3$ 本身调和并满足边界，故是解。也可由唯一性验证。**先识别简单调和函数，再决定是否要积分。** 题目要求推导泊松公式时，才需要完整求法向导数。

图 P5-12 球心泊松核均匀，球心值等于边界平均



图为球的截面与赤道示意，平均使用球面面积元，不是截面圆周长度。

5.6 · 教材§5.2.3，第341—346页 · 自编检查题

练习11 球镜像两件事都要算

球半径2，源点 $\xi=(1,0,0)$。求反演点、镜像权重，并验证边界点 $(2,0,0)$ 处抵消。

展开解析

反演点 $(4,0,0)$，权重 $R/\rho=2$。真实距离1，镜像距离2，所以 $1/1-2/2=0$。镜像点位于球外；如果误取同权重，则边界不会为0。

5.6 · 教材§5.2.3，第341—346页 · 自编检查题

练习12 球心值不需要做长积分

单位球面边界为 $g=2+\xi_1^2$，求调和解在球心的值。

展开解析

球心值等于球面平均。对称性使三个平方的平均相同，且球面上 $\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2=1$，故各平均为 $1/3$。答案 $7/3$。注意边界多项式 $2+x_1^2$ 本身不调和，不能直接当整个球内的解。

数学物理方程篇·第五章 / 5.7

二维对数核与矩形谱展开

教材§5.2.4，第346—352页

5.7 · 教材§5.2.4，第346—352页

25 二维基本解用圆周通量定系数

二维径向调和函数为 $A+B\ln r$。要求 $\Delta\Gamma_2=\delta_2$，小圆周通量为 $2\pi B=1$，故

$$\Gamma_2(x)=\frac{1}{2\pi}\ln|x|.$$

三维是 $-1/(4\pi r)$，二维是 $\ln r/(2\pi)$，不能只换积分符号而保留原核。二维物理图像常对应三维中沿一个方向均匀延伸的线源。对数中的长度严格说应除以参考长度；改变参考长度只增加常数，不改变拉普拉斯和点源强度。

图 P5-13 二维对数核和三维倒距离核由不同通量定出



基本解分别为ln r/(2π)与−1/(4πr)；本章格林函数的奇异部分取反号。

5.7 · 教材§5.2.4，第346—352页

26 上半平面：两个对数合并成距离比

区域 $y>0$，真实源 $\xi=(s,h)$、镜像源 $\xi^{*}=(s,-h)$。本章约定的格林函数为

$$G(x,\xi)=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{|x-\xi^{*}|}{|x-\xi|}.$$

真实源附近为 $-\ln|x-\xi|/(2\pi)$，所以 $\Delta G=-\delta$。边界两距离相同，$\ln 1=0$。法向导数给出上半平面泊松公式：

$$u(x,y)=\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}}\frac{y\,g(s)}{(x-s)^{2}+y^{2}}\,ds.$$

例如 $g(s)=\cos(ks)$ 且 $k>0$，要求有界并向高处衰减，解为 $e^{-ky}\cos(kx)$。用微分和边界检查即可，无需每次重新计算有理函数积分。

5.7 · 教材§5.2.4，第346—352页

27 圆盘：二维反演还要减一个常数

半径 R 的圆盘，源点距圆心 $\rho>0$，反演点同样是 $\xi^*=R^2\xi/\rho^2$，但二维格林函数为

$$G_D(x,\xi)=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{\rho|x-\xi^*|}{R|x-\xi|}.$$

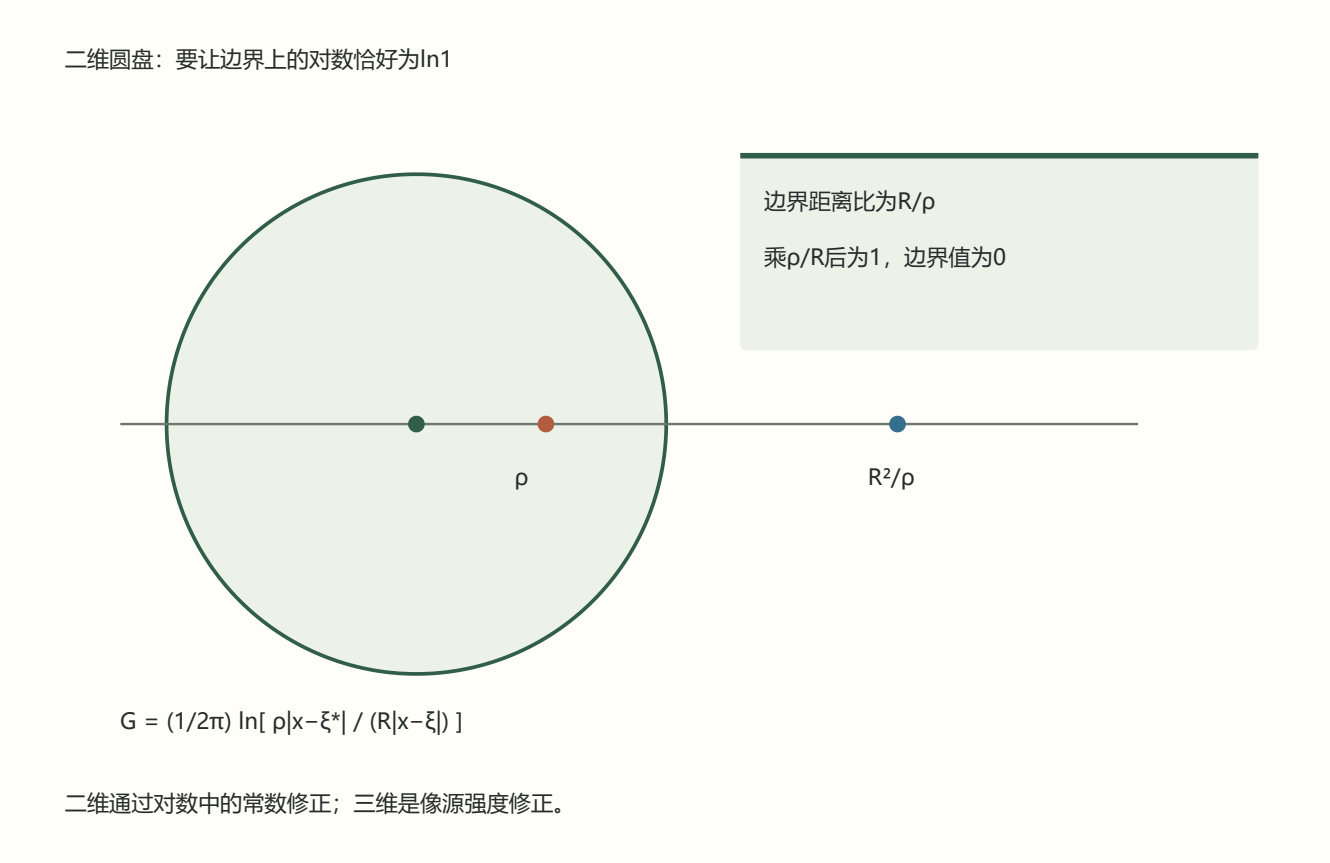
在边界上距离比为 R/ρ，额外的 ρ/R 才使对数变为0。与三维的乘权重不同，这里权重进入对数，等价于修正常数。圆心源为 $\ln(R/|x|)/(2\pi)$。

圆盘泊松公式为

$$u(r,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{R^2-r^2}{R^2+r^2-2Rr\cos(\theta-\alpha)}g(\alpha)d\alpha.$$

若 $g(\alpha)=3+2\cos(2\alpha)$，解为 $3+2(r/R)^2\cos(2\theta)$。这与第二、三章用分离变量求出的结果一致。**不必把不同方法的同一个解背成两份知识。**

图 P5-14 圆盘反演的距离比还要乘ρ除以R



图为平面圆盘。省略ρ/R会留下非零常数边界，虽然内部点源强度仍正确。

5.7 · 教材§5.2.4，第346—352页

28 矩形没有简单镜像时，回到特征函数

设 $0<x<A, 0<y<B$，四边为零边值。取

$$\Phi_{mn}(x,y)=\sin\frac{m\pi x}{A}\sin\frac{n\pi y}{B},\qquad \lambda_{mn}=\pi^2\left(\frac{m^2}{A^2}+\frac{n^2}{B^2}\right).$$

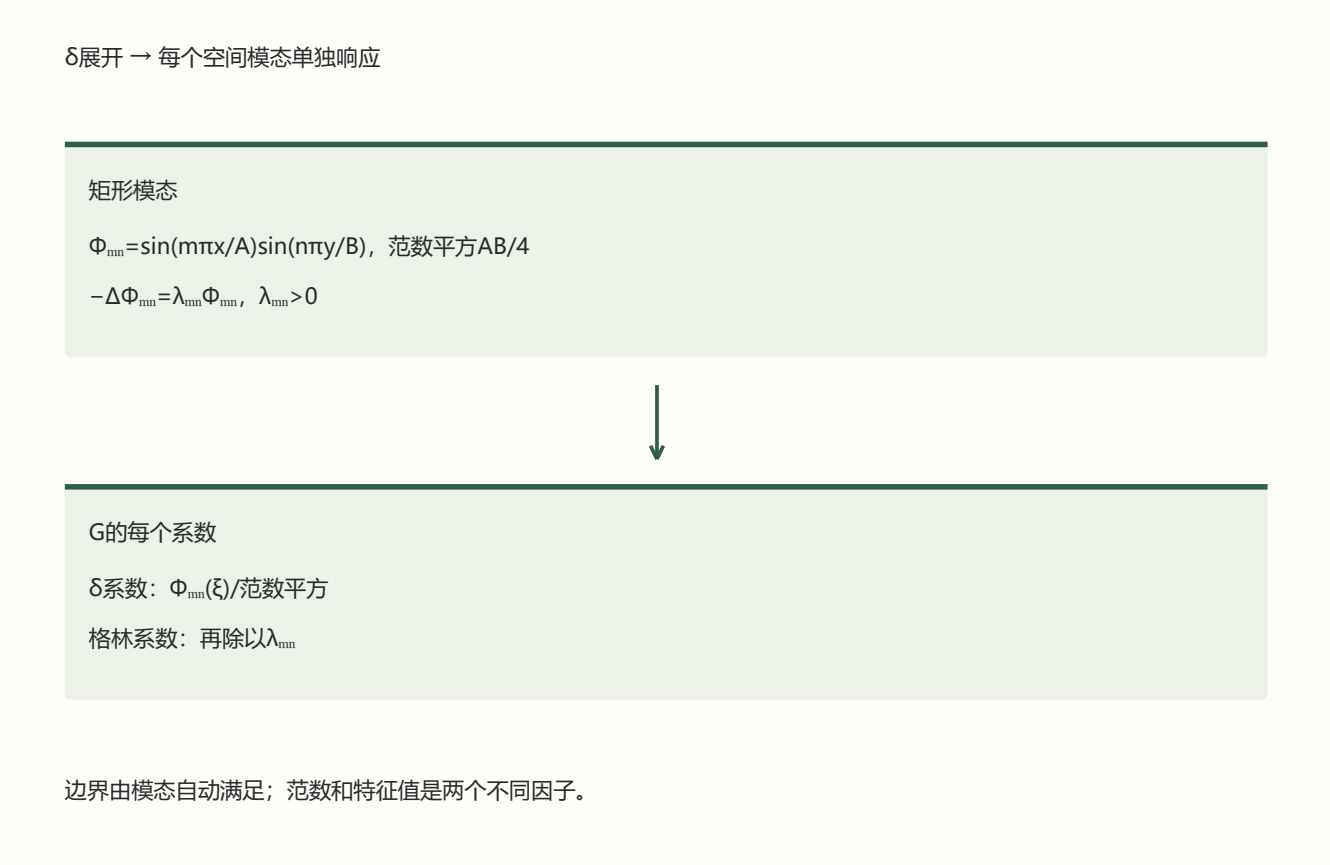
范数平方为 $AB/4$，且 $-\Delta\Phi_{mn}=\lambda_{mn}\Phi_{mn}$。因此

$$G(x,y;\xi,\eta)=\frac{4}{AB}\sum_{m,n\geq 1}\frac{\Phi_{mn}(x,y)\Phi_{mn}(\xi,\eta)}{\lambda_{mn}}.$$

为什么除以特征值： 拉普拉斯作用在每个模态上会乘 $-\lambda_{mn}$，正好还原 $-\delta$ 的展开。系数漏掉范数，或把特征值乘到分子，是最常见的两种错法。

若 $\Delta u=-q\Phi_{12}$，零边值，立刻得到 $u=q\Phi_{12}/\lambda_{12}$。格林函数的双重级数，是把所有这种单模态响应一次装进去。

图 P5-15 矩形格林函数是每个模态除以特征值



对G再施加Δ，−λ抵消分母，得到−δ的特征展开。

5.7 · 教材§5.2.4，第346—352页 · 自编检查题

练习13 对数核的符号

候选 $\widetilde{G}=(2\pi)^{-1}\ln(r_{\text{real}}/r_{\text{image}})$ 在上半平面边界为0。它是否满足本章的 $\Delta G=-\delta$?

展开解析

不满足。真实源的对数项系数为正，所以产生 $+\delta$。边界对并不保证内部源符号对。应把距离比倒过来，即整体乘 -1。

5.7 · 教材§5.2.4，第346—352页 · 自编检查题

练习14 用一个模态解矩形泊松方程

单位正方形中 $\Delta u=-5\sin(\pi x)\sin(2\pi y)$，四边为0。求解。

展开解析

该模态的特征值为 $5\pi^2$，所以 $u=\pi^{-2}\sin(\pi x)\sin(2\pi y)$。代入拉普拉斯得到右端，四边都为0。无需把全部双重级数都展开。

数学物理方程篇·第五章 / 5.8

一阶时间方程与热核的通用公式

教材§5.3，第352—357页

5.8 · 教材§5.3，第352—357页

29 一阶时间只需要一个初值

对全空间常系数问题 $u_t=Lu+f$，初值为 φ。定义 $U_t=LU$、$U(0,x)=\delta(x)$，则

$$u(t,x)=(U(t)*\varphi)(x)+\int_0^t (U(t-\tau)*f(\tau))(x)\,d\tau.$$

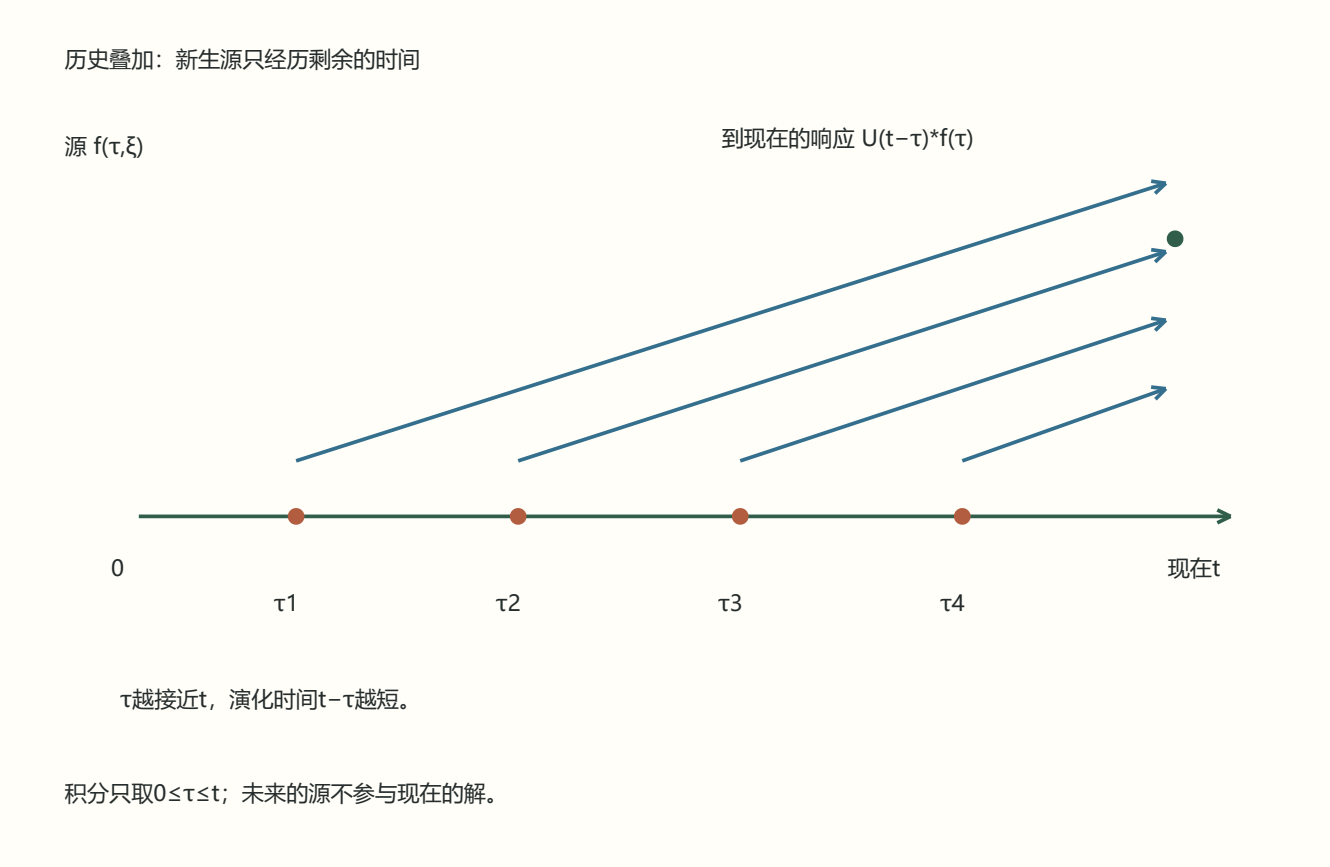
卷积只对空间做，后面还单独对源发生的时间 τ 积分。第一项让初始状态演化 t；第二项让 τ 时刻新产生的一小份源演化剩余的 $t-\tau$。

写开一次，避免用星号掩盖变量：

$$\int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} U(t-\tau, x-\xi) f(\tau, \xi) d\xi d\tau.$$

它的积分上限不能变成无穷大，否则把未来源也算进现在。对常系数算子可以利用平移不变性；有边界时要换成满足该边界的 $K(t, x, \xi)$。

图 P5-16 τ时刻产生的源只演化t减τ的时间



箭头表示每份源被推进到同一观察时刻，不表示额外的空间传播轨迹。

5.8 · 教材§5.3，第352—357页

30 为什么源项的系数恰好是1

令 $w(t) = \int_0^t U(t-\tau) * f(\tau) d\tau$，用带变上限积分的求导法则：

$$w_t = U(0) * f(t) + \int_0^t U_t(t-\tau) * f(\tau) d\tau = f(t) + Lw.$$

关键是 $U(0) = \delta$，所以第一项抽样还原 $f(t)$。$w(0) = 0$。初值项同理满足方程，且 $U(0) * \varphi = \varphi$。把两项相加，就是教材定理的证明主线。

需要学到哪里： 会独立求这一行，知道为什么是 $t-\tau$，知道最上端产生的是 $f(t)$。证明中交换微分和积分所需的正则性、增长条件可放第二轮；但遇到不收敛的数据，不能默认公式仍给经典解。

5.8 · 教材§5.3，第352—357页

31 从频域推导任意维热核

取 $L=a^2\Delta$、$a>0$。变换后

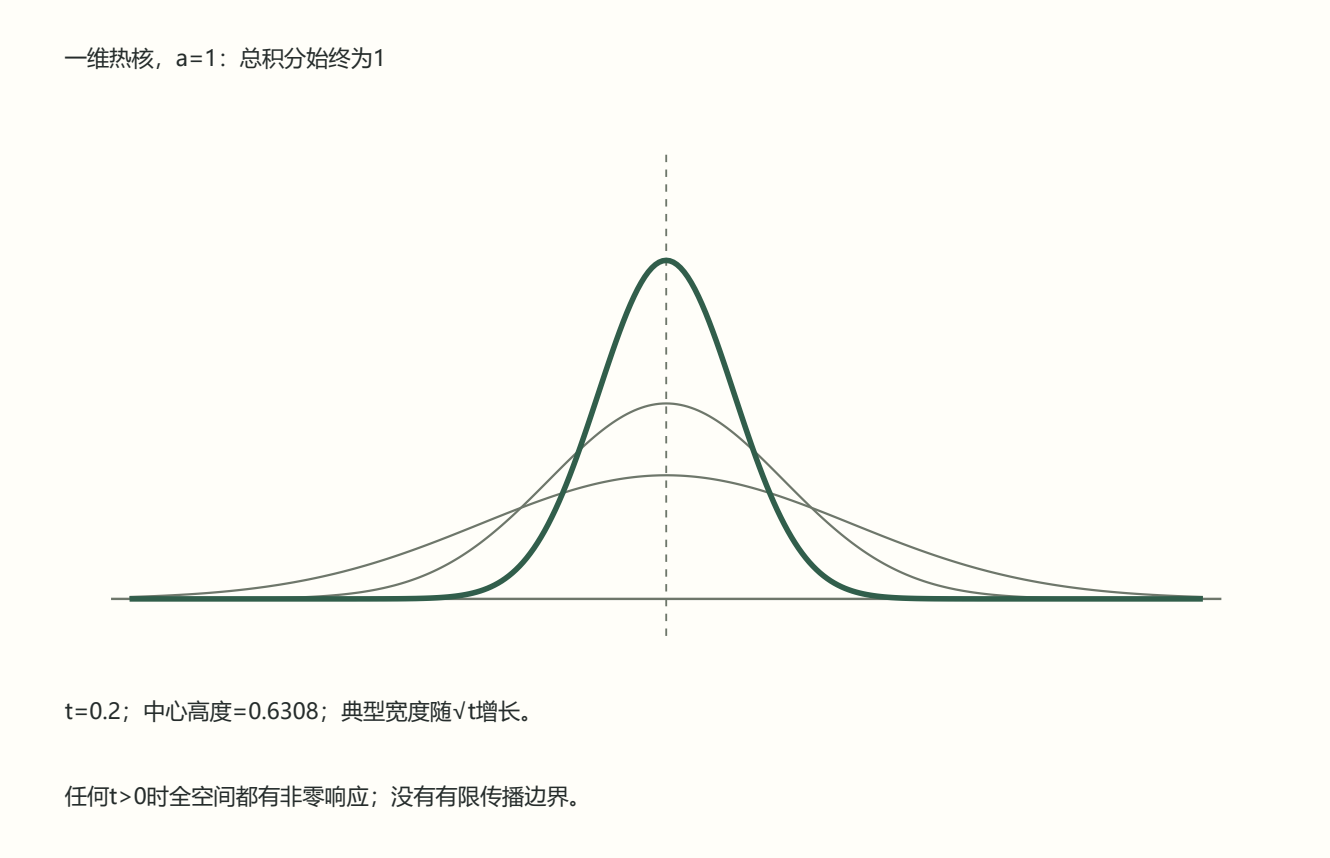
$$\partial_t \widehat{U}=-a^2|k|^2\widehat{U},\qquad \widehat{U}(0,k)=1,$$

于是 $\widehat{U}=e^{-a^2|k|^2t}$。各坐标的高斯逆变换相乘，得到

$$H_d(t,x)=\frac{1}{(4\pi a^2t)^{d/2}}\exp\left(-\frac{|x|^2}{4a^2t}\right),\qquad t>0.$$

一维分母为 $2a\sqrt{\pi t}$；二维为 $4\pi a^2t$；三维为 $(4\pi a^2t)^{3/2}$。**不要把三维指数的幂写成一维的。** 一维教材的 $1/(2a\sqrt{\pi t})$ 与上述写法完全相同。

图 P5-17 热核降峰展宽，总量守恒



图示 t=0.2；灰线为参考时刻；实线为所选时刻。降低的峰被扩大的宽度补偿。

5.8 · 教材§5.3，第352—357页

32 热核必须有的三个性质

第一，$H_d \geq 0$，且 $\int H_d dx = 1$。第二，固定 $x \neq 0$ 时，$t \to 0+$ 有 $H_d(t,x) \to 0$；但对初值卷积则 $H_d(t) * \varphi \to \varphi$，不能把前者的逐点极限拿进积分得到0。第三，峰高降低，典型宽度按 $a\sqrt{t}$ 增长。

一维归一化核的二阶矩为 $\int x^2 H_1 dx = 2a^2 t$。因此总热量守恒不表示峰值守恒。增加 a 会加快扩散。

对任意 $t > 0$，热核在全部空间为正，所以经典热方程没有有限传播速度。这是模型性质；不能给热核人为加上波动方程的 $|x| < at$ 截断。

5.8 · 教材§5.3，第352—357页 · 自编检查题

练习15 时间脉冲应该先传播多久

零初值热方程的源是 $f(t,x) = Q\delta(t-t_0)\delta(x-b)$，$t_0 > 0$。写 $t \neq t_0$ 时的解。

展开解析

当 $t < t_0$ 时为0；当 $t > t_0$ 时为 $QH_1(t-t_0, x-b)$。源发生前不能有响应；发生后传播的时间是 $t - t_0$。恰在冲击时刻以分布方式解释，不需要规定峰的普通点值。

5.8 · 教材§5.3，第352—357页 · 自编检查题

练习16 热核宽度与总量

把 a 增为两倍，固定时刻一维热核的中心高度、典型宽度和总积分各怎样变化？

展开解析

高度减半，典型宽度加倍，总积分仍为1。因为归一化系数含 $1/a$，指数的空间尺度含 $a\sqrt{t}$。只改指数、不改前系数，会破坏总量。

数学物理方程篇·第五章 / 5.9

热核题从积分走到可检查的结果

教材§5.3应用与本讲义补充

5.9 · 教材§5.3应用与本讲义补充

33 高斯初温：先配方，再读物理量

求 $u_t = a^2 u_{xx}$、$u(0,x) = e^{-\beta x^2}$，$\beta > 0$。卷积为两个高斯的积分。将指数配方，或使用高斯积分 $\int e^{-A\xi^2 + B\xi} d\xi = \sqrt{\pi/A}\, e^{B^2/(4A)}$，得到

$$u(t,x) = \frac{1}{\sqrt{1 + 4\beta a^2 t}} \exp\left(-\frac{\beta x^2}{1 + 4\beta a^2 t} \right).$$

先检查 $t = 0$ 恢复初温；再检查总积分始终是 $\sqrt{\pi/\beta}$。不要误以为初始高斯总量必为1，它有没有归一化取决于前面的系数。

做题要点： 系数、指数中的时间尺度要配套。若空间整体平移到 b，把 x 换成 $x - b$ 即可。

5.9 · 教材§5.3应用与本讲义补充

34 正弦初值、常数源和反应项

若初值 $\cos(kx)$，不用做卷积积分：它是拉普拉斯的特征函数，解为 $e^{-a^2 k^2 t}\cos(kx)$。零初值且源为常数 q，全空间均匀解为 $u = qt$；这也由 $\int H dx = 1$ 得到。

方程改成 $u_t = a^2 u_{xx} + bu$，令 $u = e^{bt} v$，就把反应项去掉。点初值的核为

$$U_b(t,x) = e^{bt} H_1(t,x).$$

它的总积分为 e^{bt}，不再总量守恒。若再加源 f，源积分中乘的是 $e^{b(t-\tau)}$，因为每份源只经历余下的演化时间。

5.9 · 教材§5.3应用与本讲义补充

35 有边界时，热核也可以做镜像

半轴 $x > 0$、齐次边界，令源点 $\xi > 0$。固定零温边界用

$$K_D(t,x,\xi) = H_1(t, x-\xi) - H_1(t, x+\xi),$$

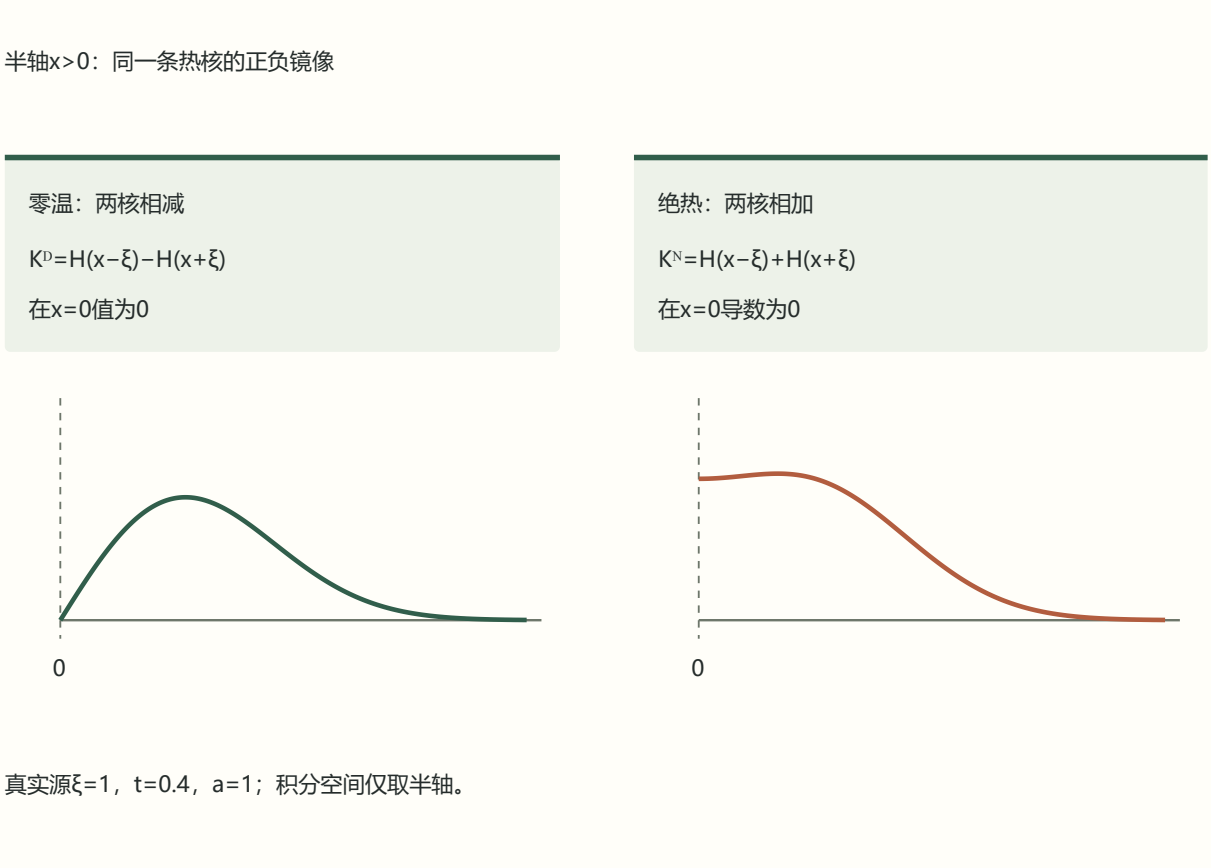
绝热边界用

$$K_N(t,x,\xi)=H_1(t,x-\xi)+H_1(t,x+\xi).$$

前者在 $x=0$ 两值抵消；后者在 $x=0$ 两导数抵消。它们必须与半轴上的数据做 $\int_0^\infty$，不能再拿全轴积分重复计算。

对 K_N，空间总积分保持1；对 K_D，小于1并随时间减少，因为边界会吸收热。有限区间的核也可按正弦/余弦特征级数构造。**全空间热核、镜像热核、特征级数是同一个思路在不同边界下的实现。**

图 P5-18 热核的镜像相减或相加满足不同端点条件



零温边界允许热流失；绝热边界保持半轴总量。

5.9 · 教材§5.3应用与本讲义补充 · 自编检查题

练习17 高斯初值检验

取 $a=1$、初温 e^{-2x^2}。写出解和中心温度，并求中心温度降为初始一半的时刻。

展开解析

解为 $(1+8t)^{-1/2}\exp[-2x^2/(1+8t)]$。中心温度 $(1+8t)^{-1/2}$。令其为 $1/2$，得到 $1+8t=4$，所以 $t=3/8$。

5.9 · 教材§5.3应用与本讲义补充 · 自编检查题

练习18 反应项的时间不能放错

零初值方程 $u_t=a^2u_{xx}+bu+1$，源在空间均匀，$b\neq 0$。求解并说明为什么结果不含 x。

展开解析

每一时刻的空间积分 $\int H dx=1$，故 $u=\int_0^t e^{b(t-\tau)}d\tau=(e^{bt}-1)/b$。均匀数据使扩散项为0，也可直接解 $u_t=bu+1$ 验证。$b\to 0$ 极限为 t。

数学物理方程篇·第五章 / 5.10

二阶时间方程先分清两个初值

教材§5.4.1，第357—362页

5.10 · 教材§5.4.1，第357—362页

36 波动基本解约定的是单位初速度

对 $u_{tt}=Lu+f$，初位移 φ、初速度 ψ。教材定义的 W 满足

$$W_{tt}=LW,\qquad W(0,x)=0,\qquad W_t(0,x)=\delta(x).$$

它与热核的初始条件不同。通用公式为

$$u(t)=\partial_t[W(t)*\varphi]+W(t)*\psi+\int_0^t W(t-\tau)*f(\tau)d\tau.$$

请按初值记：**初位移前面多一个时间导数，初速度直接乘核，外力再积时间**。 原因不是约定强迫你死记，而是 $W(0)=0$、$W_t(0)=\delta$：第一项在0时恢复 φ；第二项本身初值为0，时间导数恢复 ψ。

源项的一阶时间导数没有端点贡献，因为 $W(0)=0$；二阶求导才由 $W_t(0)=\delta$ 产生 $f(t)$。这和热方程在一阶求导就出现 f 的机制一致，但时间阶数不同。

图 P5-19 位移、速度、外力的三个入口

先定义 W(0)=0，Wₜ(0)=δ，再按数据组装

初位移 φ

∂t[W(t)*φ]：在0时恢复φ

初速度 ψ

W(t)*ψ：在0时的时间导数恢复ψ

外力 f

∫₀ᵗ W(t−τ)*f(τ)dτ：二次求导产生f

热方程只需一个初值；波动方程必须核对两个初值。

位移项的时间导数作用在整个核卷积上，不只作用在一个前系数。

5.10 · 教材§5.4.1，第357—362页

37 一维核是一个不断变宽的平台

取 $L=a^2\partial_{xx}$。频域解满足 $\widehat{W}_{tt}=-a^2k^2\widehat{W}$、$\widehat{W}(0)=0$、$\widehat{W}_t(0)=1$，故

$$\widehat{W}(t,k)=\frac{\sin(akt)}{ak},$$

其中 $k=0$ 按极限解释为 t。对 x 逆变换得

$$W_1(t,x)=\frac{1}{2a}\mathbf{1}_{\{|x|<at\}},\qquad t>0.$$

不要把这个平台误当作初位移的传播形状。它对应的是**初速度δ，初位移0**。它的空间总积分是 t，因为给单位初速度后总位移的初始增长率为1。

5.10 · 教材§5.4.1，第357—362页

38 把平台核代回去，就是达朗贝尔公式

将 W_1 与 ψ 卷积，得到 $\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)d\xi$。初位移项多一个时间导数，用变限积分法则：

$$\partial_t\left[\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\varphi(\xi)d\xi\right]=\frac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2}.$$

因此

$$u(t,x)=\frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)d\xi$$

再加源贡献

$$\frac{1}{2a}\int_0^t\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}f(\tau,\xi)d\xi d\tau.$$

题目处理： 先分成位移、速度、外力三份，再分别处理。不要在总公式中一口气代入而忘了某个初值。若源是常数 q，外力贡献应为 $qt^2/2$，这是检验系数最简单的办法。

5.10 · 教材§5.4.1，第357—362页

39 一维有限区间的零模态不能照搬成正弦

对两端零导数的区间 $(0,L)$，初位移0、初速度δ，特征展开给

$$W_N(t,x,\xi)=\frac{t}{L}+\frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\cos\frac{n\pi\xi}{L}\cos\frac{n\pi x}{L}\frac{\sin(\omega_n t)}{\omega_n},\qquad \omega_n=\frac{an\pi}{L}.$$

常数空间模态的时间方程为 $q_0''=0$，其单位初速度响应是 t，所以出现 t/L。若换成零值边界，改用正弦且没有零模态。**任何候选答案都必须回到端点求导或代值检查。** 本书该章习题3(2)的答案印刷存在这一类不匹配，详见5.15节。

5.10 · 教材§5.4.1，第357—362页 · 自编检查题

练习19 位移与速度到底放哪里

全轴波动方程 $u_{tt}=a^2u_{xx}$，$\varphi(x)=\cos(kx)$，$\psi(x)=0$。求解。若交换成 $\varphi=0,\psi=\cos(kx)$，结果怎样?

展开解析

第一题为 $\cos(akt)\cos(kx)$。第二题为 $\sin(akt)\cos(kx)/(ak)$，假设 $k\neq0$。在 $t=0$ 分别求值和求导可判断：不能把两个时间因子交换。$k=0$ 时分别为1和 t。

5.10 · 教材§5.4.1，第357—362页 · 自编检查题

练习20 外力积分的系数

全轴波动方程初位移、初速度都为0，源 $f=q$ 为常数。用双重积分算出解。

展开解析

内区间长度为 $2a(t-\tau)$，故源项为 $\int_0^t q(t-\tau)d\tau=qt^2/2$。对时间求两次导数为 q，空间二阶导数为0，初值也正确。

数学物理方程篇·第五章 / 5.11

三维波核与球面平均

教材§5.4.1例1，第359—362页

5.11 · 教材§5.4.1例1，第359—362页

40 三维核为什么集中在球面

三维频域仍有 $\widehat{W}=\sin(a|k|t)/(a|k|)$。逆变换时利用球对称性，角积分将三重积分降成径向正弦积分；再用δ的傅里叶表示，得到

$$W_3(t,x)=\frac{\delta(r-at)}{4\pi ar},\qquad r=|x|,\quad t>0.$$

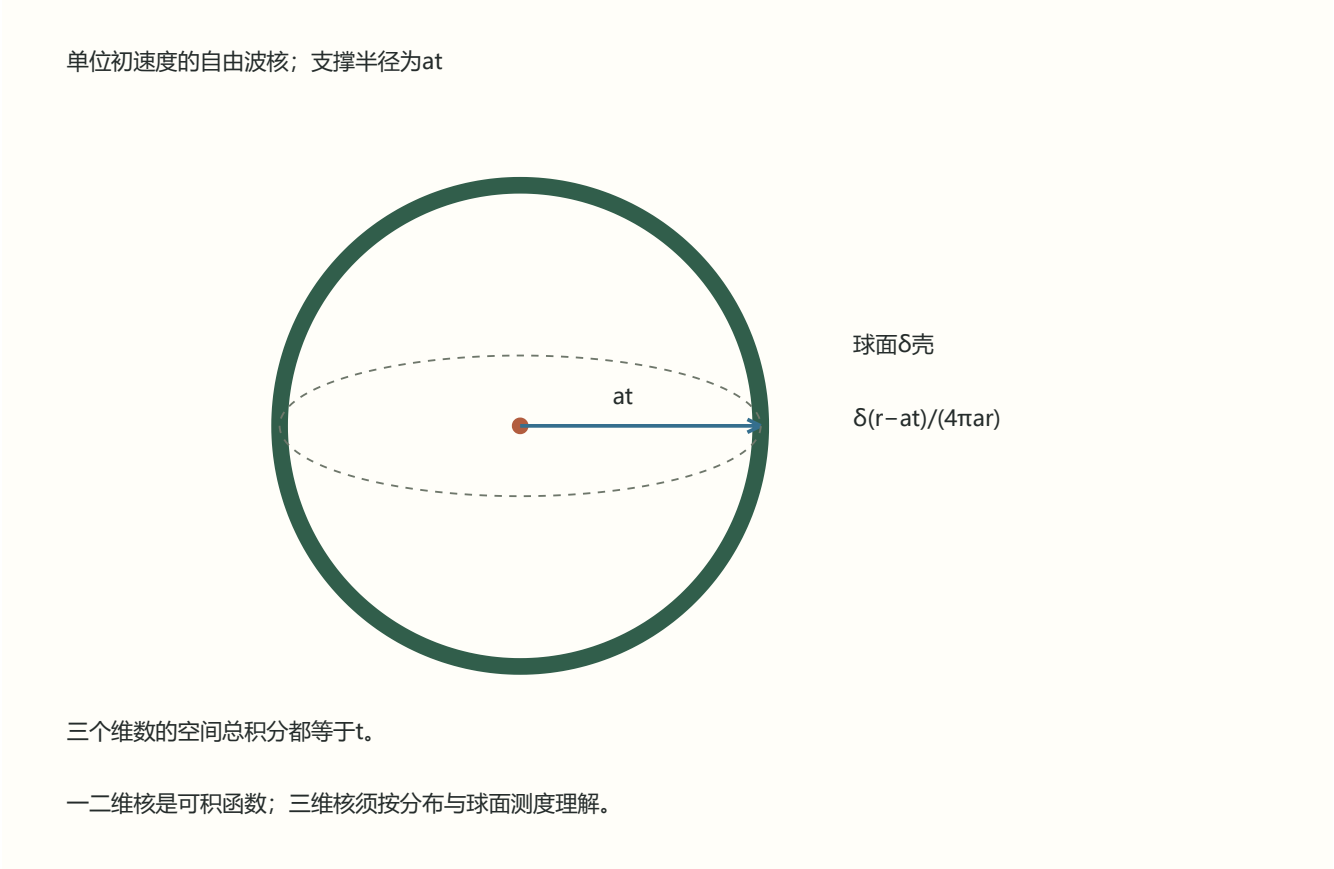
这不是普通函数，不应该去问球面上的有限高度。它说明点初速度的响应只在半径 at 的球面上。δ对半径抽样，必须结合球坐标体积元 $r^2dr d\Omega$，不能把 $1/r$ 单独看作源点处可直接代入的数。

一个归一化检查：

$$\int_{\mathbb{R}^3} W_3(t,x)dx = \frac{1}{a}\int_0^\infty r\delta(r-at)dr = t.$$

这与一维速度核的总积分相同。若你的结果为1，往往把速度核和热核混淆；若得到 at，往往漏掉一个 a。

图 P5-20 速度核在一二维内部有值，三维集中在球面



图示 三维：球面；三维示意为球壳截面，不是有限厚度、有限高度的实体薄层。

5.11 · 教材§5.4.1例1，第359—362页

41 从δ球壳积分到球面平均

固定观察点 x，令球面 $S_{at}(x)=\{\xi:|\xi-x|=at\}$，定义

$$M_{at}h(x)=\frac{1}{4\pi(at)^2}\int_{S_{at}(x)} h(\xi)dS_\xi.$$

球坐标换元后

$$W_3(t)*h=\frac{1}{4\pi a^2 t}\int_{S_{at}(x)} h(\xi)dS_\xi = tM_{at}h(x).$$

所以三维自由波动解为

$$u(t,x)=\partial_t[tM_{at}\varphi(x)]+tM_{at}\psi(x).$$

这称为三维泊松公式或基尔霍夫公式的球面平均形式。**时间导数作用在整个 $tM_{at}\varphi$ 上**，包括球面半径随时间改变的影响。不能只对前面的 t 求导。

5.11 · 教材§5.4.1例1，第359—362页

42 用球平均做多项式题

把球面点写成 $\xi=x+at\omega$，$|\omega|=1$。球面平均满足 $\langle\omega_i\rangle=0$、$\langle\omega_i\omega_j\rangle=\delta_{ij}/3$。因此

$$M_{at}(|\xi|^2)=|x|^2+a^2t^2.$$

若 $\varphi(x)=|x|^2$、$\psi=0$，则

$$u=\partial_t[t(|x|^2+a^2t^2)]=|x|^2+3a^2t^2.$$

检验：$u_{tt}=6a^2$，$a^2\Delta|x|^2=6a^2$。在三维里系数是3；二维同题系数是2，不能跨维数套答案。

若 φ 是调和函数并且球平均公式适用，则 $M_{at}\varphi=\varphi(x)$，零初速度时解保持为 $\varphi(x)$。这是快速做题的捷径。

5.11 · 教材§5.4.1例1，第359—362页 · 自编检查题

练习21 三维核的单位初速度检查

若把 W_3 错写为 $\delta(r-at)/(4\pi r)$，它的空间积分是多少？相应初速度总量是多少？

展开解析

积分为 at，在0时的导数为 a，所以初速度总量为 a，不是1。应补上分母中的 a。这个检查比直接处理原点δ容易。

5.11 · 教材§5.4.1例1，第359—362页 · 自编检查题

练习22 初速度为二次多项式

三维全空间波动方程 $\varphi=0,\psi(x)=|x|^2$。求解。

展开解析

用速度项 $u=tM_{at}\psi=t|x|^2+a^2t^3$。于是 $u_{tt}=6a^2t$，$a^2\Delta u=6a^2t$；$u(0)=0,u_t(0)=|x|^2$。注意不能再加一次时间导数，否则初值会错。

数学物理方程篇·第五章 / 5.12

降维法与二维波动

教材§5.4.2，第362—365页

5.12 · 教材§5.4.2，第362—365页

43 降维不是把三维公式里的z删掉

若三维初值与 z 无关，则解也可取与 z 无关，满足二维波动方程。但三维球面投影到二维平面时，球面的上、下两半都投到一个圆盘上，且面积元发生变化。

球半径 at，投影半径 r，一半球面的面积元为

$$dS=\frac{at}{\sqrt{a^2t^2-r^2}}dA.$$

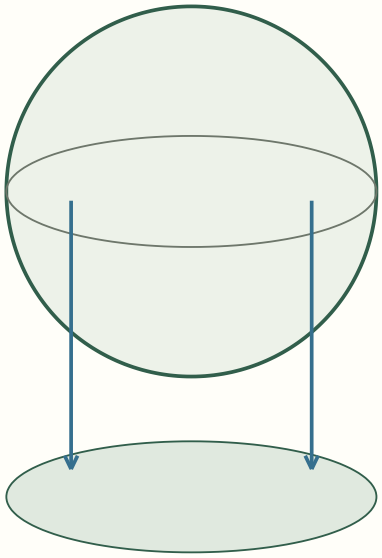
两半球面提供因子2。把它带进三维速度项，就得二维核

$$W_2(t,x)=\frac{\mathbf{1}_{\{r<at\}}}{2\pi a\sqrt{a^2t^2-r^2}},\qquad r=|x|.$$

两个关键点： 积分域是圆盘，不是圆周；边缘有可积奇异性，不是一个有限的边缘值。分母的根号来自投影面积元，因此不能凭外形把三维球壳直接降成二维圆环。

图 P5-21 两个半球面投到圆盘，边缘产生根号权重

球面投影到圆盘：上、下两面都要计算



面积元变化

每半球：

dS=at dA/√(a²t²−r²)

两半球提供因子2

圆盘边缘权重变大

降维要积掉横向变量，不能只删除一个坐标。

二维根号核的几何来源是球面投影面积元，且两半球贡献相等。

5.12 · 教材§5.4.2，第362—365页

44 二维完整公式：初位移仍然有时间导数

令 $D_{at}(x)=\{\xi:|\xi-x|<at\}$，则

$$u(t,x)=\frac{1}{2\pi a}\partial_t\int_{D_{at}(x)}\frac{\varphi(\xi)}{\sqrt{a^2t^2-|\xi-x|^2}}d\xi$$

$$+\frac{1}{2\pi a}\int_{D_{at}(x)}\frac{\psi(\xi)}{\sqrt{a^2t^2-|\xi-x|^2}}d\xi.$$

求时间导数时，积分区域也在动，边缘核又奇异，不能直接把一个普通端点值代入变限求导公式。安全做法是先积分，或令 $\xi=x+at\eta$，把区域固定成单位圆盘，再求导。

例如二维速度为常数1，极坐标积分给

$$\frac{1}{a}\int_0^{at}\frac{r}{\sqrt{a^2t^2-r^2}}dr=t,$$

所以零初位移时 $u=t$。它同时验证了二维核的总积分为 t。

5.12 · 教材§5.4.2，第362—365页

45 教材圆盘初位移例题：为什么会出现负的尾部

初速度0，初位移在单位圆盘内为1、外为0。只求中心 $u(t,0)$，对 $t\neq 1/a$，先算位移核的积分再求导：

$$u(t,0)=\frac{1}{a}\frac{d}{dt}\int_0^{\min(at,1)}\frac{r\,dr}{\sqrt{a^2t^2-r^2}}.$$

当 $at<1$，积分为 at，故 $u=1$。当 $at>1$，积分为 $at-\sqrt{a^2t^2-1}$，故

$$u(t,0)=1-\frac{at}{\sqrt{a^2t^2-1}}.$$

后一个量为负，且 $t\to\infty$ 时趋于0。波动方程不保非负，所以这不是符号错误。$t=1/a$ 附近的奇异来自初值在圆周上的跳跃，不能声称此处是普通光滑解；平滑初值会改变这个尖锐行为。

本例要学的： 分段由圆盘与初值支集的交叠关系决定；先求积分再求时间导数。无需背这个特定单位圆盘的答案。

5.12 · 教材§5.4.2，第362—365页 · 自编检查题

练习23 二维核的总积分

用极坐标验证 $\int_{\mathbb{R}^2}W_2(t,x)dx=t$。

展开解析

角积分 2π 消掉前系数，剩 $a^{-1}\int_0^{at}r/\sqrt{a^2t^2-r^2}dr=a^{-1}(at)=t$。可令 $s=a^2t^2-r^2$ 直接积分。边界奇异虽发散，整体可积。

5.12 · 教材§5.4.2，第362—365页 · 自编检查题

练习24 二维二次初位移

二维波动方程 $\varphi(x,y)=x^2+y^2$、$\psi=0$。不做圆盘积分，构造解并验证。

展开解析

设 $u=x^2+y^2+Ct^2$。则 $u_{tt}=2C$，$a^2\Delta u=4a^2$，所以 $C=2a^2$。解为 $x^2+y^2+2a^2t^2$。三维对应 $3a^2t^2$，由维数决定。

数学物理方程篇·第五章 / 5.13

传播范围与有无后效

教材带星号§5.4.3，第365—370页

5.13 · 教材带星号§5.4.3，第365—370页

46 影响区域和依赖区域是两个观察方向

影响区域： 固定一个源点，问它在时刻 t 能影响哪些观察点。**依赖区域：** 固定一个观察点和时刻，问它依赖哪些初始点。对平移不变的自由波，二者使用同一距离条件，但看图的中心不同。

一维、二维的速度核分别支撑在区间 $|x|\le at$ 和圆盘 $r\le at$；三维速度核支撑在球面 $r=at$。三者都有有限传播速度 a，因为核在 $r>at$ 为0。**有限传播不等于只有波前有响应。**

5.13 · 教材带星号§5.4.3，第365—370页

47 三维紧支集信号何时开始、何时结束

假设初位移和初速度都集中在有界区域 T，且没有外力、边界反射。固定观察点 x，令到 T 的最近、最远距离为 $d_{\min},d_{\max}$。

当 $t<d_{\min}/a$，依赖球面还没碰到支集，响应为0；当 $t>d_{\max}/a$，球面已完全越过支集，响应重新为0。中间时段有可能有响应，但也可能由于数据抵消而为0，不能把“可能非零”说成“必非零”。

这就是三维自由波的强惠更斯性质：点源响应在波前，紧支集信号经过后没有持续的内部尾部。这里说的是标准常系数、全空间、无外力的三维波方程；加边界、阻尼、势项后不能原封不动推广。

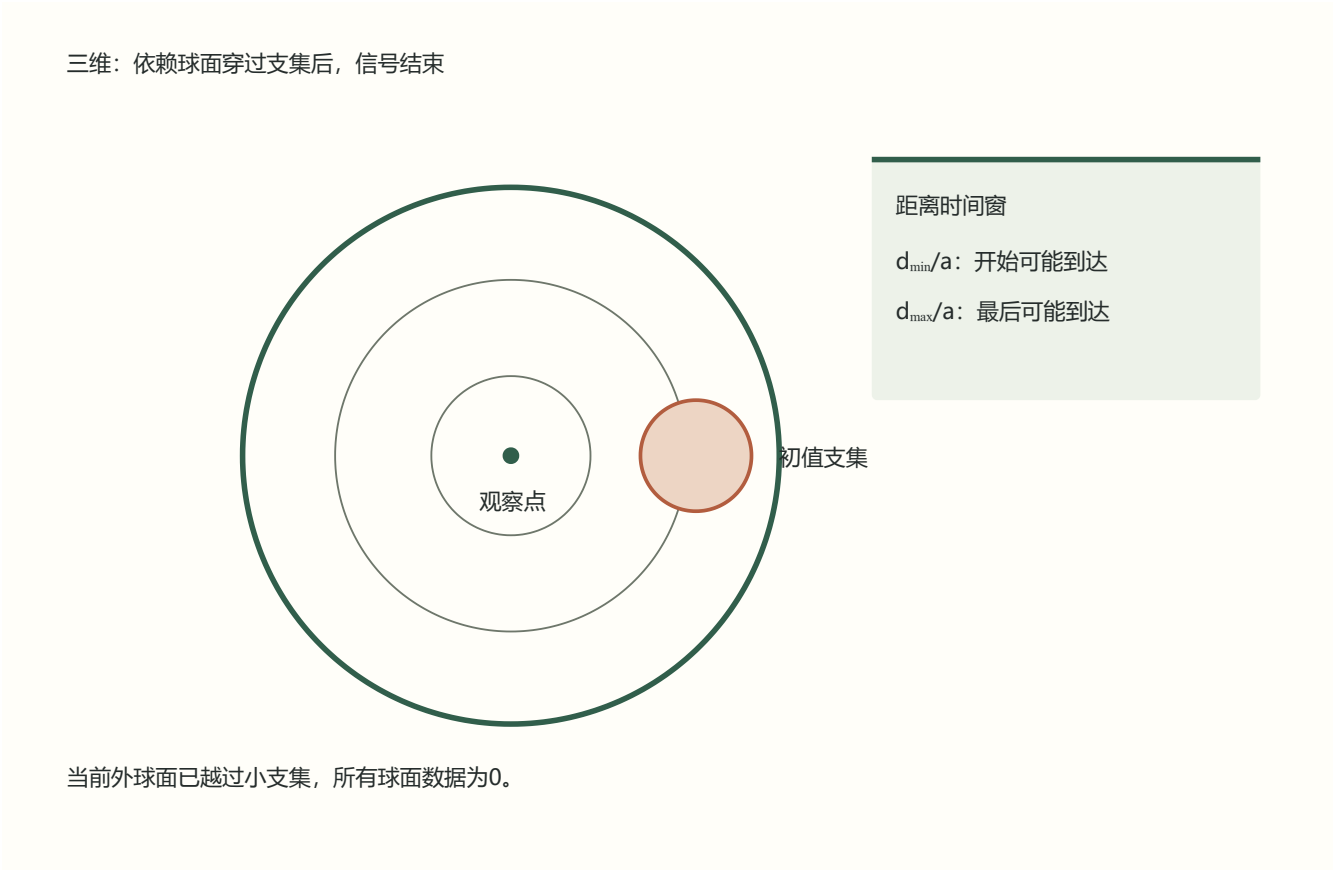
5.13 · 教材带星号§5.4.3，第365—370页

48 二维为何有尾巴，一维又要看哪种初值

二维依赖域是整个圆盘。圆盘覆盖了初值支集以后，仍然包含它，所以一般继续有衰减响应；有明确前沿，却一般没有明确结束时刻。这叫后效。并不是说每一组特殊初值都必定产生非零尾巴。

一维达朗贝尔公式中，初位移项只取两个端点，紧支集初位移会分成左右移动的波；初速度项则在整个区间积分。例如紧支集初速度的总积分非零，固定观察点在区间完全包住支集后会留下常数位移。这说明一维也不能笼统套三维“波后恢复零”的结论。

图 P5-22 三维紧支集自由波有结束窗，二维一般留尾部



图示 三维自由波；只讨论全空间标准自由波、紧支集初值；几何相交表示可能非零，数据抵消仍可能使解为零。

为什么这部分要学： 能不算积分就判断“还没到”“已经过去”“可能有尾巴”，直接解决传播时间和影响域题。教材虽标星，图像和结论仍值得第一轮掌握；完整几何证明可第二轮再看。

5.13 · 教材带星号§5.4.3，第365—370页 · 自编检查题

练习25 三维信号时间窗

源初值支集为半径2的球，球心到观察点距离5，波速 $a=3$。在没有外力和边界时，三维自由波在哪个时间窗内可能非零?

展开解析

最近距离3、最远距离7，所以可能非零的时间窗为 $[1,7/3]$。窗外必为0；窗内是否真的非零取决于数据。前后临界时刻若有不光滑初值，需要按对应解的意义解释。

5.13 · 教材带星号§5.4.3，第365—370页 · 自编检查题

练习26 同一个支集换成二维

把上题改成二维圆盘，波速仍为3。是否能断言 $t>7/3$ 后解恒为0?

展开解析

不能。$t<1$ 时依赖圆盘与支集不相交，必为0；$t>7/3$ 后圆盘覆盖支集，但积分仍在支集上进行，一般存在尾部。只凭距离无法断言尾部系数非零或决定其符号。

数学物理方程篇·第五章 / 5.14

推迟势是空间距离换成时间延迟

教材§5.4.4，第371—372页

5.14 · 教材§5.4.4，第371—372页

49 从时间积分推到推迟时间

三维零初值、源为 f 的波动方程有

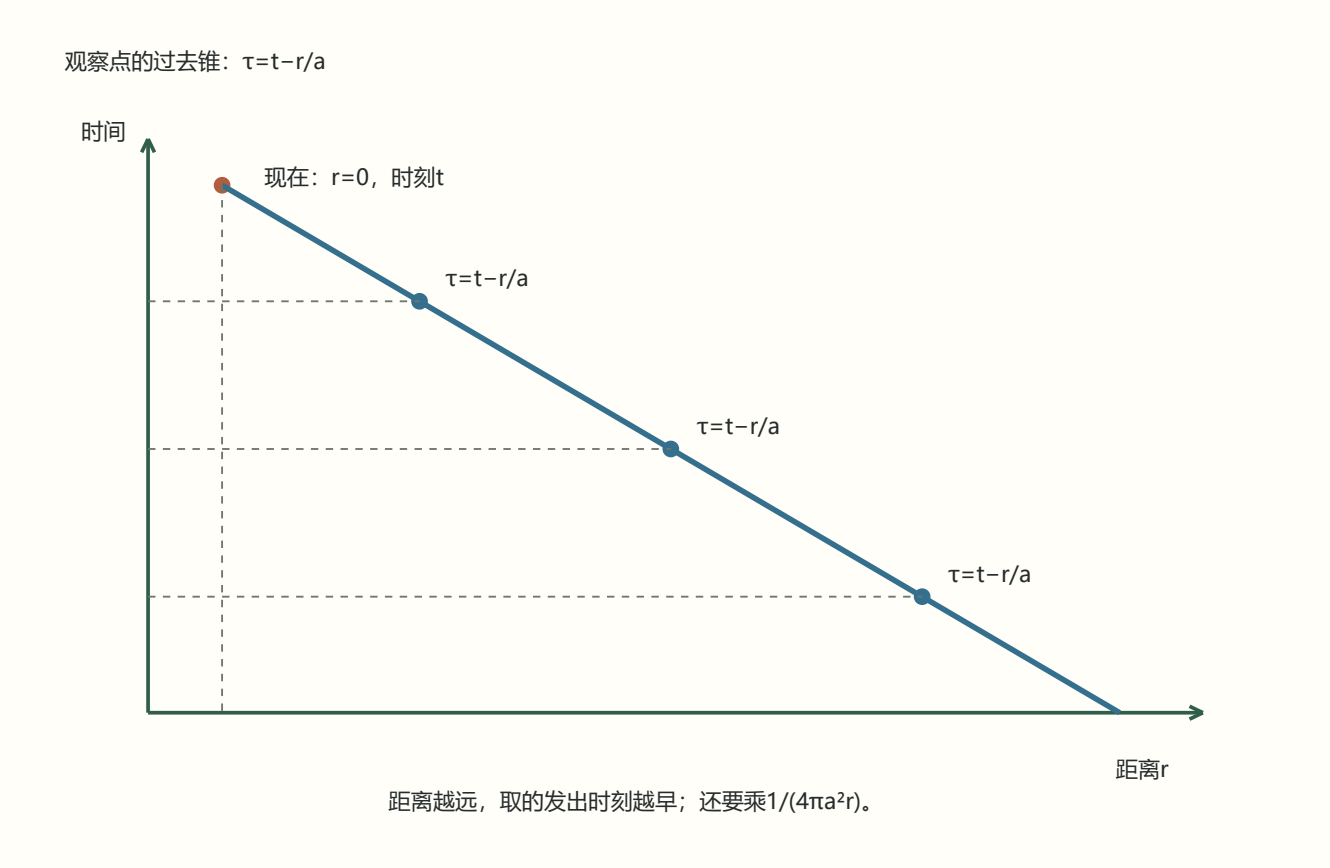
$$u(t,x)=\int_0^t\int_{\mathbb{R}^3}\frac{\delta(r-a(t-\tau))}{4\pi a r}f(\tau,\xi)d\xi d\tau,\qquad r=|x-\xi|.$$

固定源点 ξ，δ在时间上的根为 $\tau=t-r/a$。根在 $(0,t)$ 内要求 $r<at$；对 τ 的导数绝对值为 a，再产生一个 $1/a$。于是

$$u(t,x)=\frac{1}{4\pi a^2}\int_{|x-\xi|<at}\frac{f(t-|x-\xi|/a,\xi)}{|x-\xi|}d\xi.$$

这里的两个 a 来自不同地方：一个原本就在三维速度核中；另一个来自对时间抽样的雅可比。把它们都交代清楚，分母的 a^2 就不容易背错。

图 P5-23 只把过去光锥上的源送到现在的观察点



图用距离代替全部空间方向，是过去波锥的半个径向截面。源在负时间不存在时，还要限制r<at。

5.14 · 教材§5.4.4，第371—372页

50 只取发出时刻的源，不能取到达时刻的源

距观察点 r 的源需要传播 r/a 的时间，所以现在 t 看到的是过去 $t-r/a$ 的源。若源只在 $t\geq 0$ 开始作用，未到达的点要排除。也可将 f 对负时间延拓为0，然后在全空间积分。

例如点源 $f(t,x)=q(t)\delta(x-b)$，观察点 $x\neq b$，令 $r=|x-b|$。当 $t>r/a$ 时

$$u(t,x)=\frac{q(t-r/a)}{4\pi a^2 r};$$

当 $t<r/a$ 时为0。源点本身需要分布或奇异解解释，不能在上式直接令 $r=0$。若 q 为有限时长信号，则到达观察点的是同样时长、平移了 r/a 的信号，幅度含 $1/r$。

5.14 · 教材§5.4.4，第371—372页

51 其他维数的外力不能照搬三维推迟势

二维零初值源响应为

$$u(t,x)=\frac{1}{2\pi a}\int_0^t\int_{|x-\xi|<a(t-\tau)}\frac{f(\tau,\xi)}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2-|x-\xi|^2}}d\xi d\tau.$$

二维核在圆盘内都有值，没有只在单一传播时间上抽样的δ，所以一般不能缩成三维那样的单个推迟时刻。要保留历史积分。

核对全章： 源项永远是“单位源响应 × 实际源强，再把允许的时空点加起来”。静态只积空间，动态还要处理时间；边界、初始位移、初速度分别有自己的入口。

5.14 · 教材§5.4.4，第371—372页 · 自编检查题

练习27 点源到达时间

波速2，点源与观察点相距6，源强在发出时刻 $1<\tau<4$ 为 q_0，其余为0。观察点何时可能收到信号，幅度是多少?

展开解析

传播时间为3，所以接收区间为 $4<t<7$。幅度为 $q_0/(4\pi\cdot4\cdot6)=q_0/(96\pi)$。区间端点按信号阶跃的约定解释。不能把发出区间 $[1,4]$ 当成接收区间。

5.14 · 教材§5.4.4，第371—372页 · 自编检查题

练习28 近处和远处看见的是不同历史

同一源强 $q(t)=\sin(\omega t)$ 从0时开始。两个观察点距源分别为 r 与 $2r$。它们在同一时刻看见的相位和幅度关系是什么?

展开解析

都已到达以后，两者分别取 $\sin[\omega(t-r/a)]/(4\pi a^2 r)$ 与 $\sin[\omega(t-2r/a)]/(8\pi a^2 r)$。远点的幅度因子减半，并多延迟 r/a，相位差为 $\omega r/a$。不能只比较 $1/r$ 而忽略推迟时间。

数学物理方程篇·第五章 / 5.15

原书章末12个大题逐项解题

教材习题，第372—374页

5.15 · 教材习题，第372—374页

52 原书题1：五个δ恒等式都用测试函数证明

以下默认测试函数光滑且有紧支集，所有恒等式均在分布意义下成立。

(1) $x\delta(x)=0$：与 h 配对得 $0\cdot h(0)=0$。

(2) $f(x)\delta(x-a)=f(a)\delta(x-a)$：两边与 h 配对都等于 $f(a)h(a)$。

(3) $\delta(ax)=\delta(x)/|a|$，$a\neq 0$：换元 $s=ax$，两边对 h 的作用都为 $h(0)/|a|$。负的 a 会反向积分区间，结果仍含绝对值。

(4) $\delta'(-x)=-\delta'(x)$：由 $\langle\delta'(-x),h(x)\rangle=\langle\delta'(s),h(-s)\rangle=h'(0)$，而 $\langle-\delta',h\rangle=h'(0)$。

(5) $x\delta'(x)=-\delta(x)$：左边对 h 的作用是 $-(xh)'(0)=-h(0)$。

评分点： 不能只写“由δ在0以外为0可知”，那不足以证明分布恒等式。写出任意测试函数的积分才是完整的一步。

5.15 · 教材习题，第372—374页

53 原书题2：坐标变换中的δ

设 $(x,y)=F(s,q)$ 在对应点附近光滑可逆，雅可比 $J_0=\det DF(s_0,q_0)\neq 0$。待证

$$\delta(x-x_0)\delta(y-y_0)=\frac{\delta(s-s_0)\delta(q-q_0)}{|J_0|}.$$

证明时将右边乘 $h(F(s,q))|J(s,q)|$，对 s,q 积分，δ把它取在 (s_0,q_0)，得到 $h(x_0,y_0)$。这正是左边与 h 的配对，所以成立。教材写 $1/|J|$ 时，δ会自动将其取在源点。

极坐标 $J=r$，故 $r_0>0$ 时为 $r_0^{-1}\delta(r-r_0)\delta(\theta-\theta_0)$。角变量按周期或单一坐标图处理，避免 0 与 2π 重复。源在极点时用径向分布处理，不能除以 $r_0=0$。

5.15 · 教材习题，第372—374页

54 原书题3：有限杆点初值与有限弦点初速度

(1) 热方程，零值边界。 取 $X_n=\sin(n\pi x/l)$，范数平方 $l/2$，初值δ的系数为 $2\sin(n\pi\xi/l)/l$，所以

$$u(t,x)=\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi\xi}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}e^{-a^2(n\pi/l)^2t}.$$

每项在两端为0，$t\to0+$ 的级数初值按分布意义恢复δ。对 $t>0$ 指数衰减使它成为平滑温度。

(2) 波动方程，零导数边界。 空间应为余弦，且包含常数模态。令 $\omega_n=an\pi/l$，得到

$$u(t,x)=\frac{t}{l}+\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\cos\frac{n\pi\xi}{l}\cos\frac{n\pi x}{l}\frac{\sin(\omega_n t)}{\omega_n}.$$

在 $t=0$ 为0；时间导数的初值是余弦δ展开。对 x 求导后每项带 $\sin(n\pi x/l)$，两端均为0。空间积分等于 t，也与单位总初速度一致。

原书答案勘误说明： 扫描本印刷第398页对应答案的非零模态含 $\sin(n\pi x/l)$，与第373页题面 $u_x(t,0)=u_x(t,l)=0$ 不匹配。这里按题面给出余弦解；不能同时保留 t/l 又把空间基写成正弦。端点求导检验比机械对答案可靠。

5.15 · 教材习题，第372—374页

55 原书题4：各向异性与双调和基本解

本题统一取 $L\Gamma=\delta$，不是 $-\delta$。

(1) $L=\partial_{xx}+\beta^2\partial_{yy}$，$\beta>0$。令 $Y=y/\beta$，算子变成二维拉普拉斯，而 $\delta(x)\delta(y)=\beta^{-1}\delta(x)\delta(Y)$，故可取

$$\Gamma(x,y)=\frac{1}{4\pi\beta}\ln(\beta^2x^2+y^2).$$

它与 $\ln\sqrt{x^2+y^2/\beta^2}/(2\pi\beta)$ 只差常数。**必须出现 $1/\beta$**，因为δ也随坐标缩放。

(2) 二维 $L=\Delta_2^2$。对 $r>0$，$\Delta(r^2\ln r)=4\ln r+4$，再用 $\Delta\ln r=2\pi\delta_2$，可取

$$\Gamma_{2,\mathrm{bi}}(r)=\frac{r^2\ln r}{8\pi}.$$

第一步没有隐藏的点δ：$r^2\ln r$ 的小圆通量趋于0。第二步才由 $\ln r$ 产生点源。

(3) 三维 $L=\Delta_3^2$。因 $\Delta r=2/r$（分布意义下此步无点δ），而 $\Delta(1/r)=-4\pi\delta_3$，所以

$$\Gamma_{3,\mathrm{bi}}(r)=-\frac{r}{8\pi}.$$

检查符号：再施加一次拉普拉斯，$-r/(8\pi)\to -1/(4\pi r)\to\delta_3$。

5.15 · 教材习题，第372—374页

56 原书题5：亥姆霍兹基本解还需说明选择

对 $L=\Delta+k^2$，取 $L\Gamma=\delta_3$。空间傅里叶变换形式上给 $\widehat{\Gamma}=(k^2-|p|^2)^{-1}$。分母在球面 $|p|=k$ 为0，需要指定分布解释或无穷远条件，不能声称其普通逆积分绝对收敛。

不另加辐射条件时，可取实基本解

$$\Gamma(r)=-\frac{\cos(kr)}{4\pi r}.$$

验证：$r>0$ 时径向方程 $\Gamma''+2\Gamma'/r+k^2\Gamma=0$；$r\to 0$ 的主奇异项为 $-1/(4\pi r)$，通量为1，零阶项的小球积分趋于0，所以源为 $+\delta$。

若采用时间因子 $e^{-i\omega t}$ 并要求向外辐射，可选 $-e^{ikr}/(4\pi r)$。它与实核的差是齐次解。**本题必会：** 频域分母、近源归一化、为何基本解不是不加条件就唯一。辐射条件的完整谱论推导可暂缓。

5.15 · 教材习题，第372—374页

57 原书题6：三种三维区域的镜像格林函数

本题取 $\Delta_x G=-\delta(x-\xi)$、零值边界。

(1) 四分之一空间 $x_1>0,x_2>0$。 源 $\xi=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$，另设 $\xi^{(1)}=(-\xi_1,\xi_2,\xi_3)$、$\xi^{(2)}=(\xi_1,-\xi_2,\xi_3)$、$\xi^{(12)}=(-\xi_1,-\xi_2,\xi_3)$。则

$$G=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{|x-\xi|}-\frac{1}{|x-\xi^{(1)}|}-\frac{1}{|x-\xi^{(2)}|}+\frac{1}{|x-\xi^{(12)}|}\right).$$

反射一次换号，反射两次恢复正号。在任一坐标平面上成对等距抵消，三个镜像均在区域外。

(2) 上半球 $|x|<R,x_3>0$。 先用球内格林函数 G_B 处理球面，再令 $\bar{\xi}=(\xi_1,\xi_2,-\xi_3)$ 处理平面：

$$G_{\text{halfball}}(x,\xi)=G_B(x,\xi)-G_B(x,\bar{\xi}).$$

在球面上两项各自为0，在 $x_3=0$ 上两项相等。展开后有真实源、反演源、平面反射源、反演后反射源四项；只有真实源在上半球内部。球面反演权重仍为 $R/|\xi|$，不能漏掉。

(3) 层状空间 $0<z<H$。 真实源 $\xi=(\xi_1,\xi_2,\zeta)$，$0<\zeta<H$。平移像点 $\xi_n^{+}=(\xi_1,\xi_2,2nH+\zeta)$ 与 $\xi_n^{-}=(\xi_1,\xi_2,2nH-\zeta)$，则

$$G(x,\xi)=\frac{1}{4\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left(\frac{1}{|x-\xi_n^{+}|}-\frac{1}{|x-\xi_n^{-}|}\right).$$

按每个括号成对求和。$z=0$ 处通过 $n\mapsto -n$ 等距抵消，$z=H$ 处通过 $n\mapsto 1-n$ 抵消。一次反射无法同时满足两面，故需要无限像列。无穷远方向取符合衰减要求的解。

5.15 · 教材习题，第372—374页

58 原书题7：二维象限与半圆盘

本题仍取 $\Delta G=-\delta$。二维点源势改用 $-\ln r/(2\pi)$，而不是三维的 $1/r$。

(1) 第一象限。 真实源为 $\xi=(s,h)$，镜像为 $\xi_x=(-s,h)$、$\xi_y=(s,-h)$、$\xi_{xy}=(-s,-h)$，相应距离为 r_0,r_x,r_y,r_{xy}。反射符号与三维相同：

$$G=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{r_x r_y}{r_0 r_{xy}}.$$

在 $x=0$ 上 $r_0=r_x, r_y=r_{xy}$，在 $y=0$ 上 $r_0=r_y, r_x=r_{xy}$；两处均为0。

(2) 单位上半圆盘。 用单位圆盘格林函数 G_D，源 $\xi=(s,h)$、$h>0$、$|\xi|<1$，平面反射为 $\bar{\xi}=(s,-h)$。取

$$G_{\text{semidisk}}(x,\xi)=G_D(x,\xi)-G_D(x,\bar{\xi}).$$

若 $\xi^{*}=\xi/|\xi|^2$、$\bar{\xi}^{*}=\bar{\xi}/|\xi|^2$，写开为

$$G=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{|x-\xi^{*}|\,|x-\bar{\xi}|}{|x-\xi|\,|x-\bar{\xi}^{*}|}.$$

两个圆盘核的常数修正相消。圆弧上各自为0，直径上相等相减。**解法思想：** 先满足曲边，再用反射补平边；不必重新猜四个源的权重。

5.15 · 教材习题，第372—374页

59 原书题8：带反应的热方程

方程 $u_t = a^2 u_{xx} + bu$，基本解的初值为δ。令 $u = e^{bt} v$，则 $v_t = a^2 v_{xx}$，$v(0) = \delta$。因此

$$U(t,x) = \frac{e^{bt}}{2a\sqrt{\pi t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4a^2 t}\right), \qquad t > 0.$$

检验总积分为 e^{bt}，并满足 $M'(t) = bM(t)$、$M(0) = 1$。不要以热方程的守恒性否定这里的增长或衰减；多出的 bu 本来就在产生或消耗总量。

5.15 · 教材习题，第372—374页

60 原书题9：输运与阻尼波的基本解

(1) $u_t + a u_x = f$，初值 φ。沿特征线 $x(\tau) = x - a(t-\tau)$，全导数为 f。因此

$$u(t,x) = \varphi(x - at) + \int_0^t f(\tau, x - a(t-\tau))\, d\tau.$$

相应初值核为 $\delta(x - at)$。必须核对漂移方向：当 $a > 0$，形状 $\varphi(x - at)$ 向右移。

(2) $u_{tt} = a^2 u_{xx} - 2u_t - 2u$，初位移0、初速度 ψ。令 $u = e^{-t} v$，逐项求导后得到

$$v_{tt} = a^2 v_{xx} - v, \qquad v(0) = 0, \quad v_t(0) = \psi.$$

频域速度核为 $\sin(t\sqrt{a^2k^2+1})/\sqrt{a^2k^2+1}$。其逆变换为

$$W_v(t,x) = \frac{1}{2a} J_0\left(\frac{\sqrt{a^2t^2 - x^2}}{a}\right) \mathbf{1}_{\{|x|<at\}}.$$

所以

$$u(t,x) = \frac{e^{-t}}{2a} \int_{x-at}^{x+at} J_0\left(\frac{\sqrt{a^2t^2 - (x-\xi)^2}}{a}\right) \psi(\xi)\, d\xi.$$

教材提示中的一般参数式需要成套处理缩放：逆变换 $\sin(A\sqrt{k^2+b})/\sqrt{k^2+b}$ 对应 $J_0(\sqrt{b}\sqrt{A^2-x^2})/2$。在本题 $A = at, b = 1/a^2$，于是得到上式。第一轮无需证明整张贝塞尔积分变换表，但必须会指数替换、参数对应与初值检查。

5.15 · 教材习题，第372—374页

61 原书题10：二维非齐次波动的积分式

初位移、初速度都为0，所以只保留源项。令 $r^2=(x-\xi)^2+(y-\eta)^2$，则

$$u(t,x,y)=\frac{1}{2\pi a}\int_0^t\iint_{r<a(t-\tau)}\frac{f(\tau,\xi,\eta)}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2-r^2}}d\xi d\eta d\tau.$$

得分要件： 正确的 $1/(2\pi a)$、正确的历史时间 $t-\tau$、随 τ 缩小的圆盘、正确的根号。用常数源 q 检验：空间积分为 $(t-\tau)$，时间积分为 $qt^2/2$。

5.15 · 教材习题，第372—374页

62 原书题11：再降一维得到达朗贝尔

把二维数据取为与 y 无关。对二维核中的横向变量积分，固定 $s=x-\xi$，有

$$\int_{-\sqrt{a^2t^2-s^2}}^{\sqrt{a^2t^2-s^2}}\frac{d\eta}{2\pi a\sqrt{a^2t^2-s^2-\eta^2}}=\frac{1}{2a}$$

当 $|s|<at$ 成立，外部为0。这正是一维平台核。再对初位移核卷积求时间导数，就得到

$$u(t,x)=\frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)d\xi.$$

这里降维做了真正的横向积分；只删变量会丢掉几何权重，得不到正确的一维系数。

5.15 · 教材习题，第372—374页

63 原书题12：四道直接使用公式的题

(1) 高斯初温。 对 $u_t=a^2u_{xx}$、$u(0,x)=e^{-x^2}$，第33单元的 $\beta=1$ 给出

$$u(t,x)=\frac{1}{\sqrt{1+4a^2t}}\exp\left(-\frac{x^2}{1+4a^2t}\right).$$

(2) 二维波，初位移 $P=x^2(x+y)$，初速度0。 因 $\Delta P=6x+2y$、$\Delta^2P=0$，时间展开在二次项终止：

$$u=P+\frac{a^2t^2}{2}\Delta P=x^2(x+y)+a^2t^2(3x+y).$$

检验 $u_{tt}=2a^2(3x+y)=a^2\Delta u$，两个初值也正确。虽然多项式不在 L^1，核在有限圆盘上的积分仍有意义，且可直接验证所得经典解。

(3) 二维波，源 $h=x+y$，初位移0、初速度 h。 因 $\Delta h=0$，设 $u=hq(t)$，得到 $q''=1, q(0)=0, q'(0)=1$，故

$$u=(x+y)\left(t+\frac{t^2}{2}\right).$$

(4) 三维波，源 $h=x+y+z$，初位移和初速度都为 h。 同样 $\Delta h=0$，所以 $q''=1, q(0)=q'(0)=1$，得到

$$u=(x+y+z)\left(1+t+\frac{t^2}{2}\right).$$

这组题真正考什么： 公式的三份数据是否放对位置，以及能否看出拉普拉斯使多项式降次。能用有限模态或多项式直接求解时，不要强迫自己做复杂积分。

数学物理方程篇·第五章 / 5.16

最后八题与全书学习收尾

本章综合训练与掌握标准

5.16 · 本章综合训练与掌握标准

64 把整章压成一张方法选择表

题目触发条件	先求什么	最后怎样组装
全空间 $Lu=f$	$L\Gamma=\delta$	$\Gamma * f$ 再加满足附加条件的齐次解
$\Delta u=-f$、给定边界值	$\Delta G=-\delta$、$G\|_S=0$	源体积分减边界法向导数积分
一阶时间 $u_t=Lu+f$	$U(0)=\delta$	初值卷积加历史源积分
二阶时间 $u_{tt}=Lu+f$	$W(0)=0, W_t(0)=\delta$	位移项求时间导数，速度项直接卷积，再加源
平面、球、圆等简单边界	镜像或反演修正	先检查所有边界，再写数据积分
矩形等有限区域	特征函数和范数	静态除以特征值，动态乘相应时间响应

图 P5-24 先看区域与时间阶数，再决定解的组装方式



方法由题目数据决定；算完后检验条件，是比只看答案形状更可靠的习惯。

5.16 · 本章综合训练与掌握标准 · 自编检查题

练习29 δ乘积不要丢掉导数项

化简 $(x^2+1)\delta'(x-1)$。

展开解析

按 $f\delta'_a = f(a)\delta'_a - f'(a)\delta_a$，结果为 $2\delta'(x-1) - 2\delta(x-1)$。用任意 h 检查作用为 $-2h'(1) - 2h(1)$。

5.16 · 本章综合训练与掌握标准 · 自编检查题

练习30 给定核后恢复一个静态解

单位球内 $\Delta u=-6$，边界值为2，且解在球心正则。求解并说明两份数据各贡献多少。

展开解析

源的零边值响应为 $1-r^2$；边界常数的调和响应为2。总解 $u=3-r^2$。拉普拉斯为 -6，$r=1$ 时为2。这两份分别对应格林源积分与泊松边界积分。

5.16 · 本章综合训练与掌握标准 · 自编检查题

练习31 半轴热核的总量

初温 $\delta(x-b)$，$b>0$。半轴零温边界与绝热边界在很长时间后的总热量分别怎样？说明理由。

展开解析

绝热核 $H(x-b)+H(x+b)$ 在半轴积分始终为1。零温核相减，总积分为 $\operatorname{erf}(b/(2a\sqrt{t}))$，随 $t\to\infty$ 趋于0。后者可将两个高斯积分换元得到，反映边界吸收热量。

5.16 · 本章综合训练与掌握标准 · 自编检查题

练习32 三维球面平均的混合项

三维自由波动方程初位移 $\varphi=x_1x_2$，初速度 $\psi=2$。求解。

展开解析

x_1x_2 为调和多项式，球面平均不变；常数初速度给出 $2t$。解为 x_1x_2+2t。时间二阶导数和空间拉普拉斯都为0，初值正确。

5.16 · 本章综合训练与掌握标准 · 自编检查题

练习33 二维波动与恒定源

二维全空间 $u_{tt}=a^2\Delta u+q$，初位移 x^2+y^2，初速度0。求解。

展开解析

初位移部分为 $x^2+y^2+2a^2t^2$，源部分为 $qt^2/2$，所以总解为 $x^2+y^2+(2a^2+q/2)t^2$。直接代入 $u_{tt}=4a^2+q$ 检查。

5.16 · 本章综合训练与掌握标准 · 自编检查题

练习34 推迟势中的δ缩放

说明 $\delta(r-a(t-\tau))$ 对 τ 积分时为什么产生 $1/a$。若 $r>at$，结果为何为0?

展开解析

内函数对 τ 的导数是 $a>0$，根 $\tau_*=t-r/a$。简单根公式给 $\delta(r-a(t-\tau))=\delta(\tau-\tau_*)/a$。$r>at$ 时根为负，不在 $[0,t]$ 内，所以没有抽样贡献。

5.16 · 本章综合训练与掌握标准 · 自编检查题

练习35 三维能否出现永久尾部

有人说：“三维点源响应只在球面，所以任何三维有外力问题的解最后必为0。”指出缺少的条件。

展开解析

持续外力会不断发出新信号，不能从单次脉冲的球面支撑推断总响应必终止。恢复零的时间窗结论还依赖无外力、紧支集初值、全空间标准自由波、无边界反射等条件；无界初值也可能一直提供球面数据。

5.16 · 本章综合训练与掌握标准 · 自编检查题

练习36 独立识别三类题的第一步

分别写第一步：A. 有限绝热杆中点加热；B. 半球内零边界点源；C. 二维全空间零初值、给定随时变化外力的波动。不要计算最终积分。

展开解析

A. 用余弦特征函数含常数模态，将δ投影，时间乘热衰减因子。B. 用球内格林函数减去源点关于平面的反射核，并核查球面和平面均为0。C. 写二维圆盘波核的时空卷积，空间半径为 $a(t-\tau)$，再对 $0<\tau<t$ 积分。三题分别由边界、几何、时间阶数决定入口。

5.16 · 本章综合训练与掌握标准

65 到什么程度算学会本章

基础过关： 不看答案做对检查题1—8，能说出δ是如何抽样的；面对基本解先写它满足 $+\delta$ 还是 $-\delta$。

标准习题过关： 能独立写出半空间与球内格林函数；能正确组装源项、边界项和初值项；能完成原书题3、8、9(1)、10、12，最后逐项验初值和边界。错因要记录为具体动作，例如“忘了余弦的常数模态”，不要只写“粗心”。

提高过关： 能推导二维降维核和三维推迟势；能处理复合镜像、双调和基本解与亥姆霍兹核；能交代正则性、支撑、无穷远条件和辐射选择。原书题4—7及9(2)适合放在第二轮集中做。

不要求第一轮背下所有核的每个积分推导。要求你能用一个短检验重建关键系数：静态核用小球通量，热核用总积分1，波动速度核用总积分 t，边界核用代值或求法向导数。

5.16 · 本章综合训练与掌握标准

66 全书整理完以后，下一步怎样学

这本书复变函数篇七章、数学物理方程篇五章的正文材料至此均已整理成讲义。学习可以分三次往回走：

1. **方法骨架：** 复积分与留数 → 傅里叶/拉普拉斯变换 → 方程、初值、边界分类。每一章先做最基本的例题，能说出为什么选该方法。
2. **方程主线：** 建模与定解条件 → 分离变量及正交投影 → 特殊函数 → 积分变换 → 本章基本解。重点检查边界如何筛选特征函数，以及初值如何决定系数。
3. **混合练习：** 把题目抄到另一页，遮住章标题，先判断区域、边界、时间阶数、源和初值，再求解。若离开章标题就选不出方法，优先练判断，不要继续背公式。

每次做题都固定写五行：**题目数据 → 选法理由 → 核或特征基 → 系数/积分 → 验证**。 做错后定位具体失败的那一行，回看对应单元，再用一题同类小题确认已经改正。

本讲义附的36道检查题都有解析，但应先遮住答案独立写。原书本章12个大题也给了路线、推导要点和结果；这不能代替你亲自完成一次计算。真正能让脑子清楚的，是把每个符号对应到“它在题目里负责什么”。

来源、编排与掌握要求

依据用户提供的严镇军《数学物理方法》扫描本数学物理方程篇·第五章整理；正文印刷页325—372上部，章末习题372—374。扫描PDF文件页序等于印刷页码加6。按原书节序覆盖各主题，以重新讲解、推导主线和例题说明组织，采用原创讲解，不逐字复述原文。自编检查题与原书习题分开编号，原书题号可在本章习题路线中查找；第五章另按原书12个大题逐项给出解法、结果与适用条件；自编检查题另列。

第一轮优先掌握能独立做题所需的概念、步骤和适用条件；背景、证明及拓展均说明用途和暂缓深究的边界。数学物理方程篇·第五章含36道自编检查题及完整解析。公式与SVG内嵌，可离线阅读；屏幕答案默认折叠，打印时自动展开。整理日期：2026年10月22日。