数学物理方法 / 数学物理方程篇

数学物理方程篇·第四章学习讲义

积分变换方法

固定变换约定 → 方程与条件一起变换 → 热核与半轴边界 → 延迟和误差函数 → 留数与共振。按教材顺序展开概念、例题、证明主线与解题条件；每章附原书习题路线和自编检查题。

严镇军教材配套讲读　教材310—324页　28道自编检查题　离线SVG公式与图解

本章最重要的能力，是把“偏微分方程＋初始边界条件”一起变成像函数的问题，再把答案反演回来。 变换不是只处理方程的一种符号操作；漏掉初值或边界项，得到的常微分方程就已经错了。

对应原书印刷页310—324，扫描PDF第316—330页。正文310—323页上部，习题323—324页。沿原书4.1傅里叶变换、4.2拉普拉斯变换的顺序，展开全部六个主要例题，并补上半平面调和、有源热方程和原书习题路线。为便于学习拆成十一节。

第一轮必须会：按本书正负号约定写导数变换；全直线用傅里叶、半直线按边界选正弦或余弦、时间初值问题用拉普拉斯；保留非齐次边界产生的项；识别热核、延迟、误差函数、卷积和极点；把所需边界和初值完整恢复。热核、梁振动的振荡核、波的延迟核行为不同，不能混用。

本章另有28道自编检查题与完整解析。原书只有两组大题，包含10个小题；它们在4.9逐一给出路线与关键结果。自编题分开编号。证明段会说明它的做题用途，以及第一轮可以暂缓的部分。

学习顺序：先跟着例题写关键步骤，再独立完成检查题，最后按习题路线回到原书。证明段落均说明用途，不要求第一轮逐行背诵。

本章目录

4.1 先固定变换约定与做题流程	教材310—312页
4.2 全直线热传导与热核	教材312—314页
4.3 梁振动的傅里叶解与振荡核	教材314—315页
4.4 半直线的正弦余弦变换与边界项	教材315—317页
4.5 拉普拉斯变换：先用已知初值消去时间导数	教材317—318页
4.6 半无限弦上的均匀时间外力	教材318—319页
4.7 半无限杆给定端温与误差函数	教材319—321页
4.8 有限弦的边界驱动与留数反演	教材321—323页
4.9 原书两组十个小题的路线与关键结果	教材323—324页
4.10 选方法与交卷前的检查	全章310—324页
4.11 二十八道自编检查题与完整解析	独立编号不对应原书题号

数学物理方程篇·第四章 / 4.1

先固定变换约定与做题流程

教材310—312页

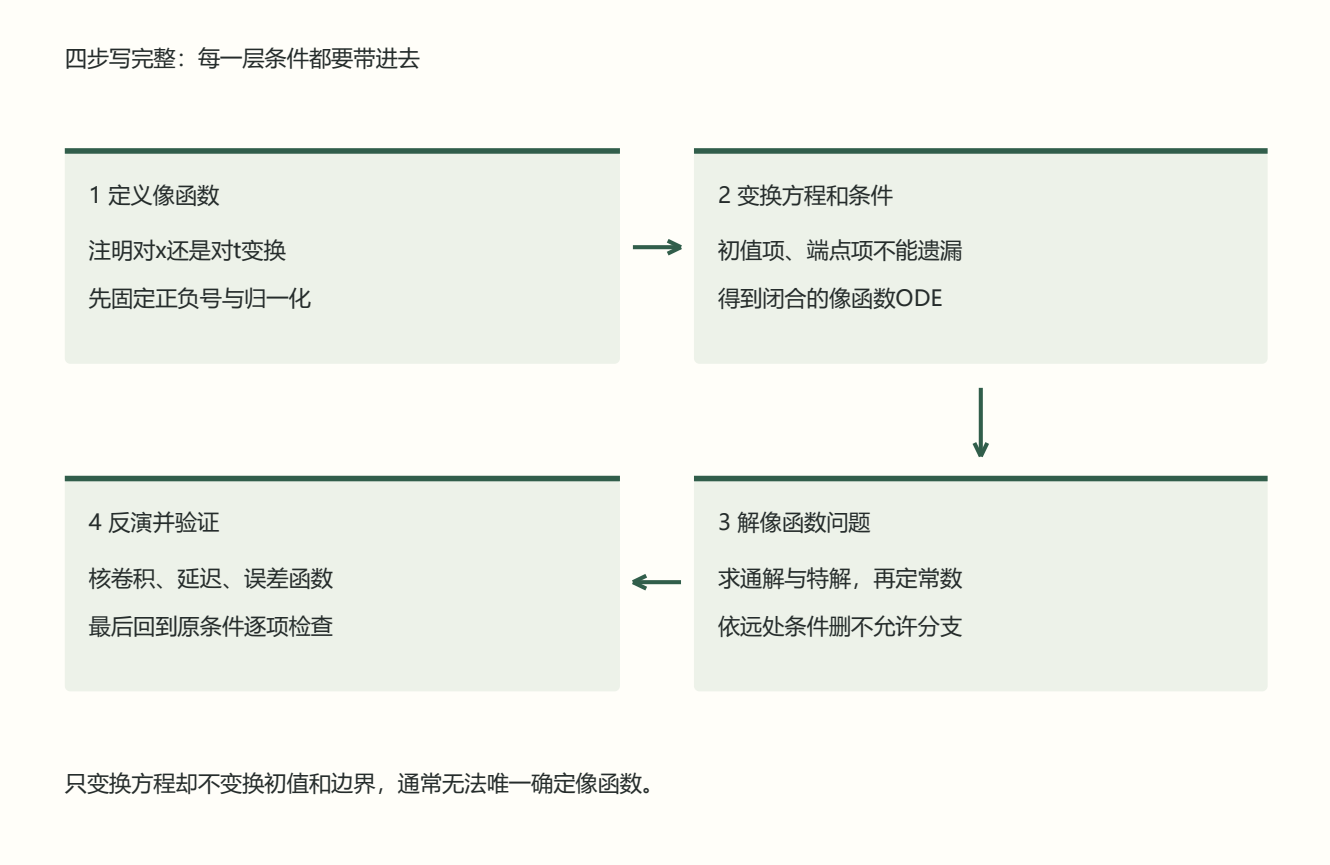
4.1 · 教材310—312页

01 变换的作用：把一个变量的求导换成代数运算

例如$u_t = \kappa u_{xx}$，对x作傅里叶变换后，u_{xx}变成$-\lambda^2\hat{u}$，只留下关于t的一阶ODE。对t作拉普拉斯变换后，u_t变成$pU - u(0,x)$，只留下关于x的ODE。选哪一个，要看区域和已知数据。

每题按四步写：①定义本题像函数，注明变换变量；②变换方程和所有相关条件；③解像函数的常微分方程并定常数；④反演、检查原条件。**如果第一步都没有说对谁变换，后面很容易把p, λ, x, t混成一团。**

图 P4-1 方程与定解条件一起变换，再求像函数与反演



读图顺序：上排从左向右、下排从右向左。每一步都能独立检查。

4.1 · 教材310—312页

02 本书正向指数是正号，导数因子因此是负号

本讲义严格沿用本书：

$$\widehat{f}(\lambda)=\mathcal{F}[f](\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{i\lambda x}dx,\quad f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{f}(\lambda)e^{-i\lambda x}d\lambda.$$

在足够衰减、可分部积分的条件下，

$$\mathcal{F}[f']=-i\lambda\widehat{f},\quad \mathcal{F}[f'']=-\lambda^2\widehat{f},\quad \mathcal{F}[f^{(4)}]=\lambda^4\widehat{f}.$$

原因是$\int f'e^{i\lambda x}=[fe^{i\lambda x}]_{-\infty}^{\infty}-i\lambda\int fe^{i\lambda x}$，边界项在上述条件下为零。别的教材若正向用$e^{-i\lambda x}$，一阶因子会反号，二阶不变。**先看定义，再查表。**

图 P4-2 正向指数的正号决定一阶导数的负i因子

本书约定：正向 exp(+iλx)，反向 exp(-iλx)/(2π)

分部积分一次

∫ f′ exp(iλx) dx

端点项为0时

得到 -iλ F(λ)

多次求导

一阶：-iλ

二阶：-λ²

四阶：+λ⁴

卷积反演：F⁻¹[F(λ)G(λ)] = f*g

此约定下，这一条乘积反演没有额外2π因子。

不同教材约定可以不同，导数符号与归一化必须成套使用。

一阶符号由正向指数决定；二阶与四阶分别给负λ²与正λ⁴。

4.1 · 教材310—312页

03 线性位移卷积与高维公式，只记最有用的几条

线性性直接来自积分。乘指数与平移满足

$$\mathcal{F}[e^{i\lambda_0 x}f(x)] = \widehat{f}(\lambda+\lambda_0), \quad \mathcal{F}[f(x-c)] = e^{i\lambda c}\widehat{f}(\lambda).$$

本书卷积定义$(f*g)(x)=\int_{\mathbb{R}} f(x-\xi)g(\xi)d\xi$，因此$\mathcal{F}[f*g]=\widehat{f}\,\widehat{g}$，反过来$\mathcal{F}^{-1}[FG]=f*g$，**这里没有额外的$2\pi$**。正向定义没带归一化因子，乘积反演就按这个约定。

d维正向指数$e^{i\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{x}}$，反向系数$(2\pi)^{-d}$，$\mathcal{F}[\Delta u]=-|\boldsymbol{\lambda}|^2\widehat{u}$。每个方向的一阶因子都按同一符号约定。

4.1 · 教材310—312页

04 傅里叶积分存在与解公式适用，不是同一个问题

原书先用逐段光滑、绝对可积等充分条件介绍变换及反演；跳跃点反演通常恢复左右极限平均。推导PDE时还需说明求导、积分交换与边界项合法。

但得到热核公式以后，可以直接验证它适用于更广的有界连续初温，即使初温常数的普通傅里叶积分不收敛。**不能因为推导用了某组充分条件，就把它当成最终解公式唯一允许的数据；也不能把一个不收敛的普通积分硬说成收敛**。

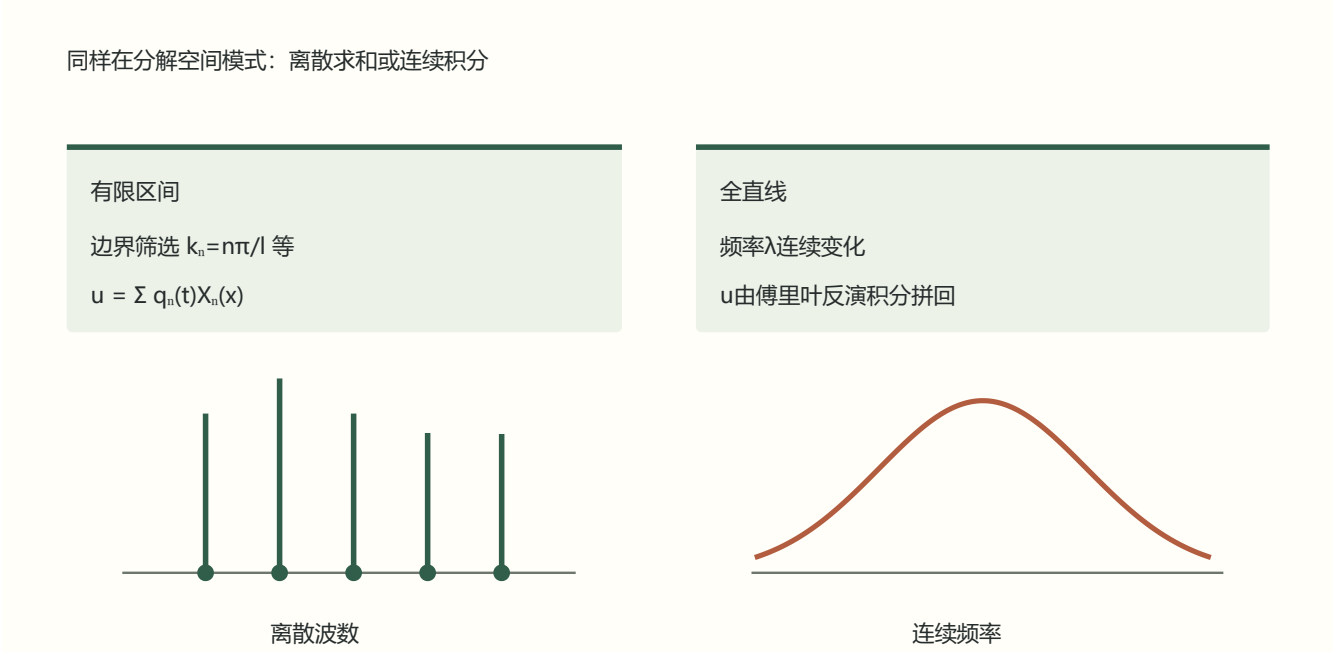
第一轮先在光滑、衰减的数据上掌握运算；常数、正弦等有界数据可由直接代入或适当广义变换理解。完整的分布理论可以暂缓，但需要知道正在用的公式属于哪种意义。

4.1 · 教材310—312页

05 上一章的离散模态，为什么变成频率积分

有限区间的端点把空间波数筛成离散值，解写成级数；全直线上没有两端约束，频率λ连续变化，解用反演积分拼回去。两者都把空间模式分开处理。

图 P4-3 有限区间是离散频谱，全直线是连续频率



图下两幅仅示频率分布方式；具体频谱幅度由初始数据决定。

不必把“连续谱理论”完整证明后才能做题。需要会判断：有限区间常用特征级数；全直线适合傅里叶积分；半直线可用正弦、余弦；时间从0开始且初值已知，常用拉普拉斯。

数学物理方程篇·第四章 / 4.2

全直线热传导与热核

教材312—314页

4.2 · 教材312—314页

06 原书例1：把初始条件也变换，才有唯一像函数

考虑$u_t = a^2 u_{xx}$，$x \in \mathbb{R}$、$t > 0$，$u(0,x) = \varphi(x)$，$a > 0$。定义$\widehat{u}(t,\lambda) = \int u(t,x) e^{i\lambda x} dx$。在足够衰减的初始推导中，

$$\partial_t \widehat{u} = -a^2 \lambda^2 \widehat{u}, \qquad \widehat{u}(0,\lambda) = \widehat{\varphi}(\lambda).$$

所以$\widehat{u} = \widehat{\varphi} e^{-a^2\lambda^2 t}$。如果只写一般解$C(\lambda) e^{-a^2\lambda^2 t}$而没用初值，就还没有完成这道定解题。

时间衰减率和上一章热模态一样是“扩散率乘空间特征值”；只是这里λ连续，不是整数编号。

4.2 · 教材312—314页

07 高斯反演的常数：漏掉一个根号就不守恒

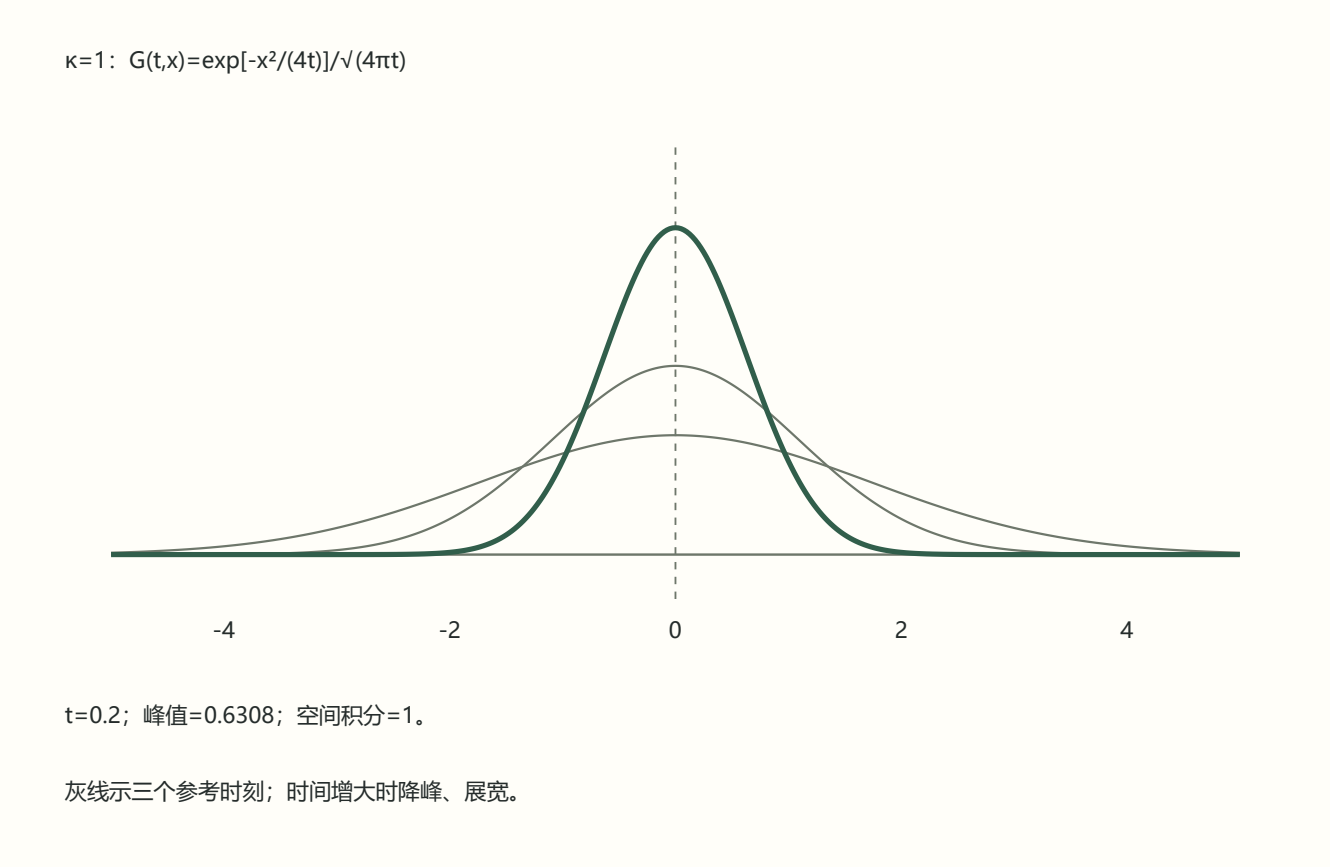
利用高斯积分，

$$G_\kappa(t,x)=\frac{1}{\sqrt{4\pi\kappa t}}\exp\left(-\frac{x^2}{4\kappa t}\right),\quad \kappa>0,t>0,$$

$$\mathcal{F}[G_\kappa(t,\cdot)](\lambda)=e^{-\kappa\lambda^2 t}.$$

教材$\kappa=a^2$，前因子就是$1/(2a\sqrt{\pi t})$。热核满足$G_t=\kappa G_{xx}$、$G\ge 0$、$\int_{\mathbb{R}}G dx=1$。最后一个积分是最快的常数检查。

图 P4-4 热核展宽降峰，空间积分始终为1



图示 t=0.2；曲线处处非负；这是单位总热量的温度分布，不是任意初温的完整解。

4.2 · 教材312—314页

08 卷积解、初值恢复与一个高斯完整例子

由乘积反演为卷积，

$$u(t,x)=(G_\kappa(t,\cdot)*\varphi)(x)=\frac{1}{\sqrt{4\pi\kappa t}}\int_{\mathbb{R}} e^{-(x-\xi)^2/(4\kappa t)}\varphi(\xi)d\xi.$$

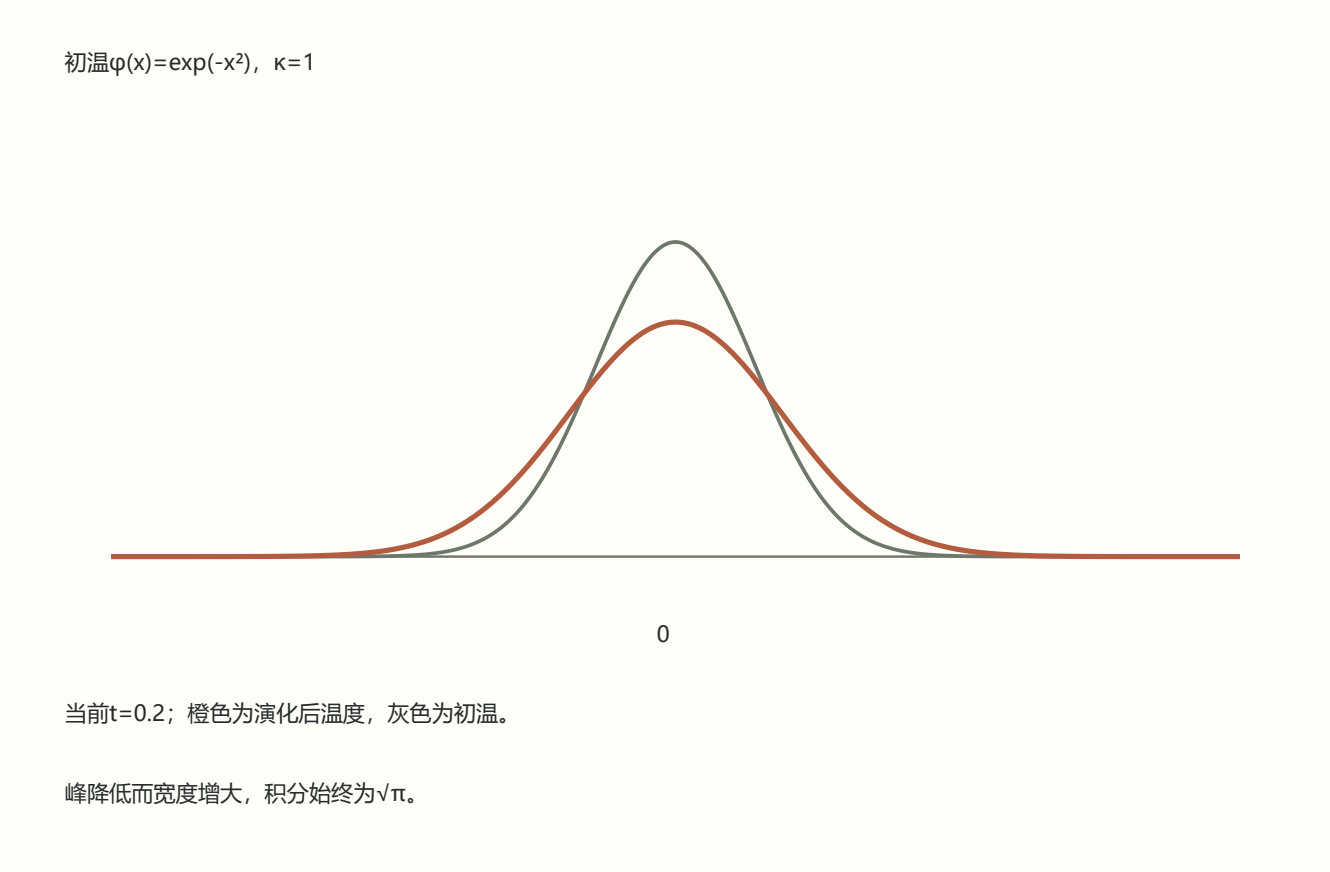
$t\downarrow 0$时核集中到x附近，在连续点恢复$\varphi(x)$；不能直接把$t=0$代入含$1/\sqrt{t}$的核再积分。对可积初温总积分保持，对有界初温温度是初值的正权平均。

例如$\varphi(x)=e^{-\beta x^2}$，$\beta>0$，完成平方得

$$u(t,x)=\frac{1}{\sqrt{1+4\kappa\beta t}}\exp\left[-\frac{\beta x^2}{1+4\kappa\beta t}\right].$$

峰降低、宽度增大，总积分不变。若初温恒为C，由核积分为1立刻得$u=C$。

图 P4-5 高斯初温的峰降低、宽度增大，总量保持



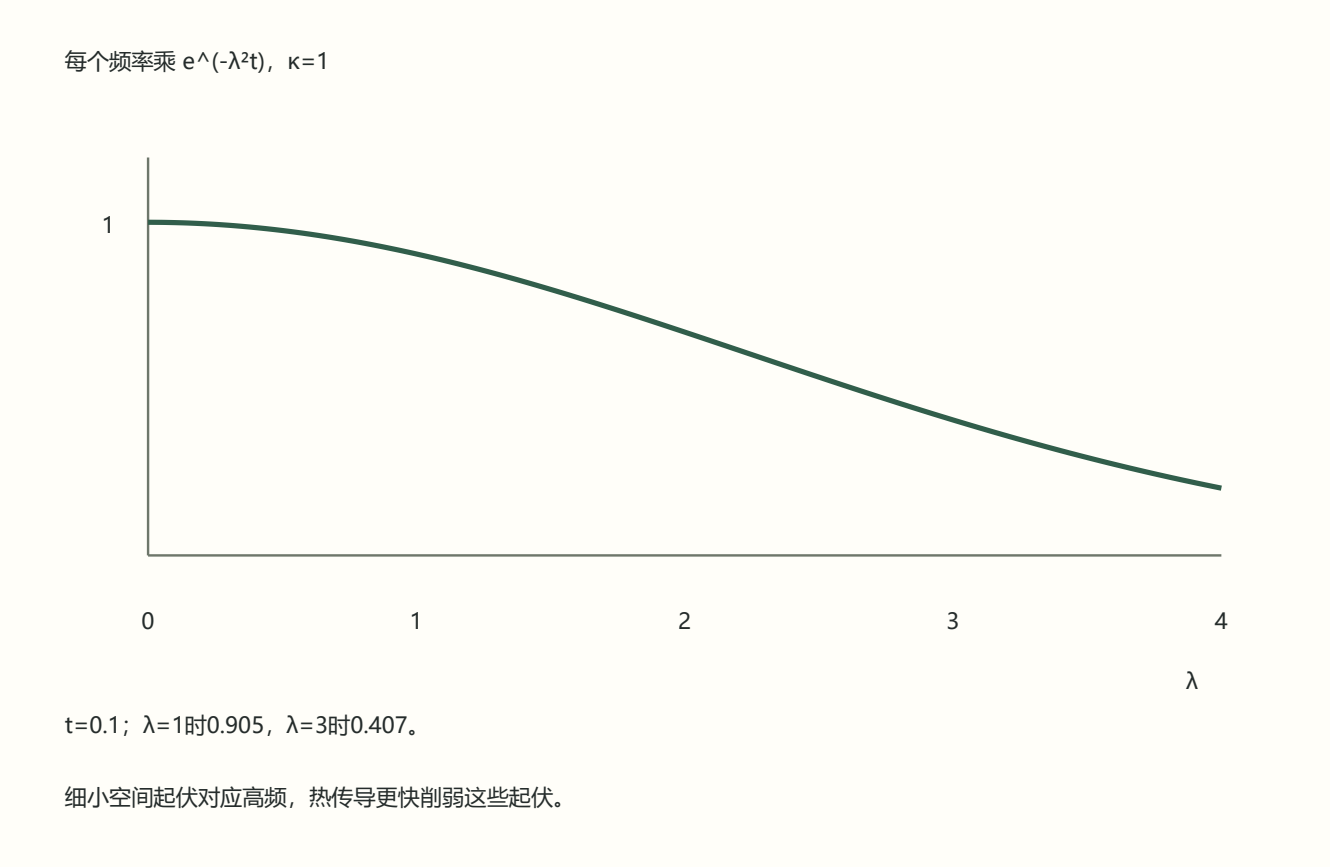
图示 t=0.2；精确解u=(1+4t)^(-1/2)exp[-x²/(1+4t)]；当前中心温度=0.7454。

4.2 · 教材312—314页

09 频率视角：高频衰减快，空间形状会变平滑

每个空间频率都乘$e^{-\kappa\lambda^2 t}$。同一时刻，频率大两倍，衰减指数里的系数大四倍；细小起伏先消失。这正是热传导平滑形状的原因。

图 P4-6 热频率乘子按频率平方衰减



图示 t=0.1；纵轴是频率幅度乘子，不是空间温度；λ=0的乘子为1。

热核还满足$G(t) * G(s) = G(t+s)$。先演化s再演化t，等价于直接演化$t+s$。这个性质由频域指数相乘立刻得到，讲它是为了检查卷积和时间因子是否一致，不要求另背长积分证明。

4.2 · 教材312—314页

10 有源热方程：在空间卷积之外再积一次时间

对$u_t = \kappa u_{xx} + f(t,x)$、$u(0,x) = \varphi(x)$，变换后是$\widehat{u}_t + \kappa\lambda^2 \widehat{u} = \widehat{f}$。积分因子给

$$\widehat{u} = e^{-\kappa\lambda^2 t}\widehat{\varphi} + \int_0^t e^{-\kappa\lambda^2(t-\tau)}\widehat{f}(\tau,\lambda)\,d\tau.$$

反演：

$$u(t,x)=G_\kappa(t)*\varphi(x)+\int_0^t\int_{\mathbb{R}}G_\kappa(t-\tau,x-\xi)f(\tau,\xi)d\xi\,d\tau.$$

空间积分累加不同位置的源，时间积分累加过去各时刻的源；只写一个$G(t)*f(t)$一般不对。此式直接解决原书习题1(2)，也是上一章齐次化原理在连续频率中的版本。

数学物理方程篇·第四章 / 4.3

梁振动的傅里叶解与振荡核

教材314—315页

4.3 · 教材314—315页

11 原书例2：四阶空间导数给λ的四次方

考虑$u_{tt}+a^2u_{xxxx}=0$，全直线初位移φ、初速度零。空间变换得

$$\widehat{u}_{tt}+a^2\lambda^4\widehat{u}=0,\quad \widehat{u}(0,\lambda)=\widehat{\varphi},\quad \widehat{u}_t(0,\lambda)=0,$$

$$\widehat{u}=\widehat{\varphi}\cos(a\lambda^2t).$$

这是梁的色散模型，时间频率为$a\lambda^2$，不是弦波的$a|\lambda|$。有非零初速ψ时，再加$\widehat{\psi}\sin(a\lambda^2t)/(a\lambda^2)$，$\lambda=0$处按极限$t$理解。

4.3 · 教材314—315页

12 Fresnel反演：先反演复指数，再取实部

令$c=at>0$，利用振荡高斯积分，

$$\mathcal{F}^{-1}[e^{ic\lambda^2}](x)=\frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{4\pi c}}e^{-ix^2/(4c)}.$$

取实部得到

$$K_a(t,x)=\mathcal{F}^{-1}[\cos(at\lambda^2)]=\frac{1}{2\sqrt{2\pi at}}\left[\cos\frac{x^2}{4at}+\sin\frac{x^2}{4at}\right].$$

因此零初速时$u=K_a(t)*\varphi$。计算主线是完成平方，再用$\int_{\mathbb{R}}\cos(cy^2)dy=\int_{\mathbb{R}}\sin(cy^2)dy=\sqrt{\pi/(2c)}$。第一轮会识别这是Fresnel型振荡积分即可，完整围道计算已在复变函数积分部分提供工具。

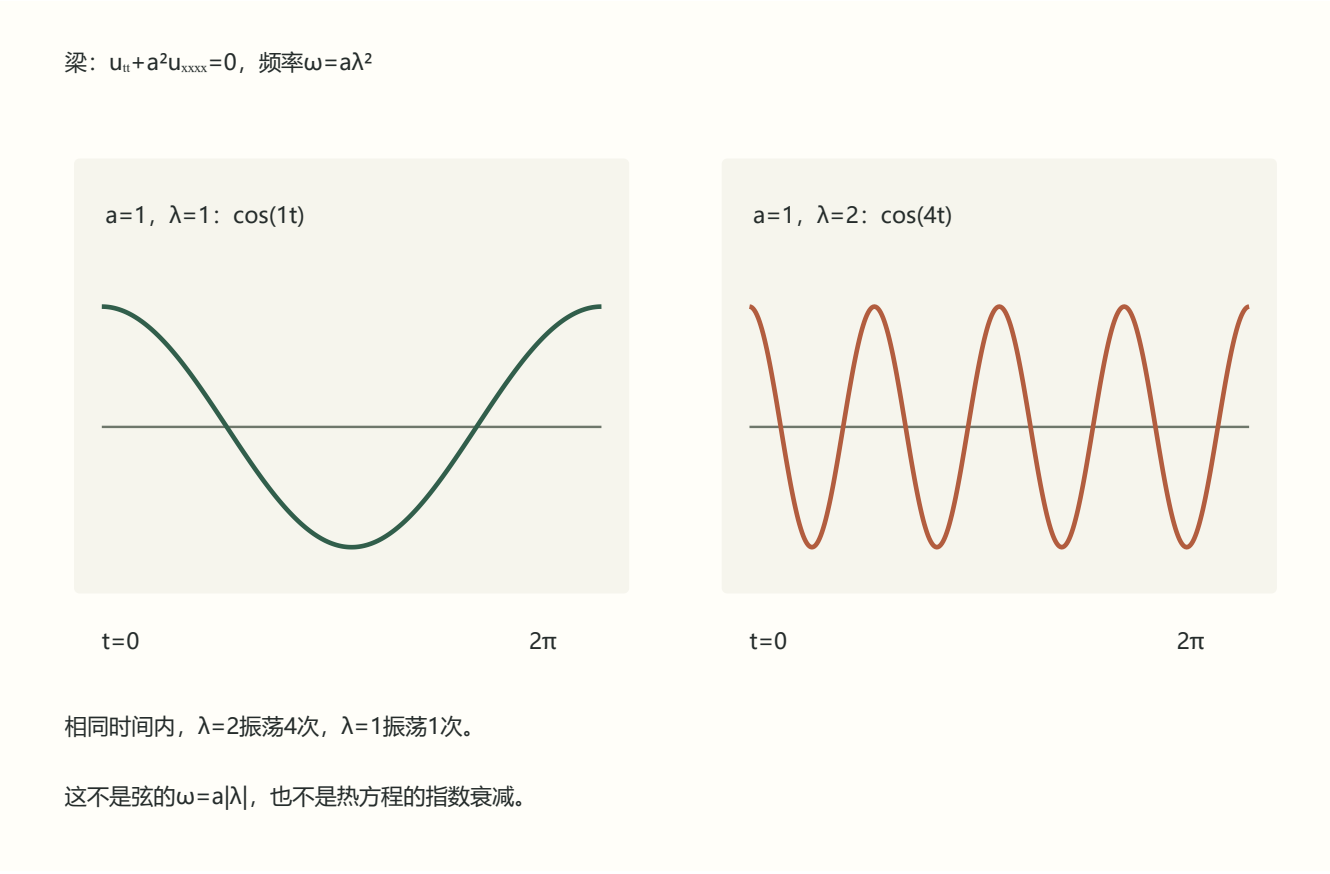
4.3 · 教材314—315页

13 振荡核不能当作热核，它会变号

热核在空间处处非负且绝对可积，梁核正负交替、并不作为普通绝对可积核使用。可通过先加$e^{-\varepsilon\lambda^2}$正则化再取极限，或在适当的广义变换意义理解反演；对足够好的初位移，卷积表达可直接验证。

用途： 防止看到一个“核”就宣布它是概率权重、满足热方程最大值性质。第一轮不要求建立一般振荡积分理论，但要知道热扩散和梁振动的时间乘子不同，所用反演条件也不同。

图 P4-7 梁模态的时间频率是a乘波数平方



图只展示两个空间模式的时间因子。空间导数阶数改变，时间频率的波数依赖也改变。

4.3 · 教材314—315页

14 用一个空间模式直接检查，不必先算振荡积分

初形$\varphi(x)=\cos kx$、初速零时，可直接代入得到$u=\cos(ak^2t)\cos kx$。它不是绝对可积数据，但作为有界经典模式可以直接验证。

若误写成$\cos(akt)\cos kx$，代入会留下$a^2(k^4-k^2)$，一般不为零。**每种模型的“空间导数阶数→特征值→时间频率”都要先从原方程算，不能凭外形套弦的频率。**

数学物理方程篇·第四章 / 4.4

半直线的正弦余弦变换与边界项

教材315—317页

4.4 · 教材315—317页

15 定义与反演：这里的2除π不能省

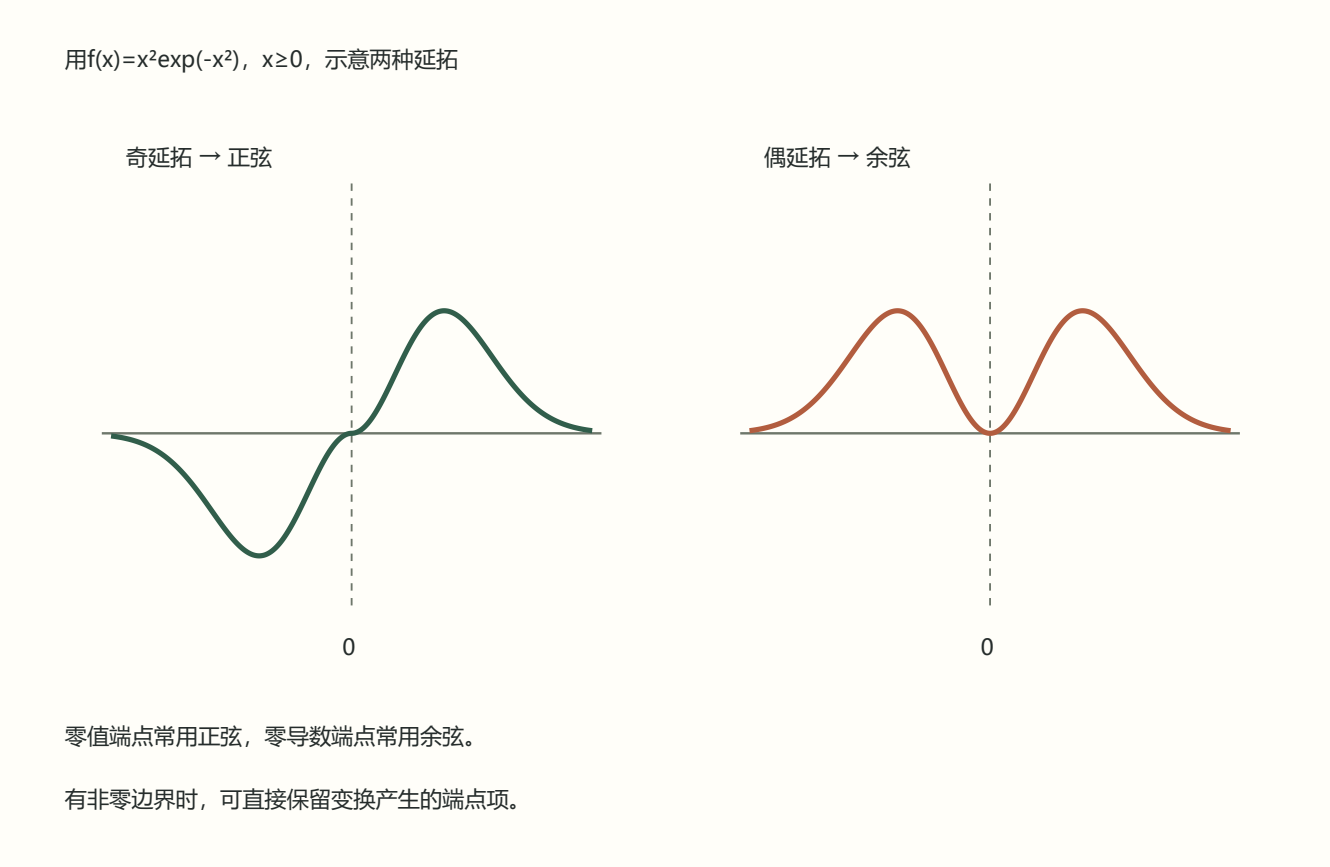
对$x>0$，定义

$$S[f](\lambda)=\int_0^\infty f(x)\sin\lambda x\,dx,\quad C[f](\lambda)=\int_0^\infty f(x)\cos\lambda x\,dx.$$

相应反演为$f(x)=(2/\pi)\int_0^\infty S[f](\lambda)\sin\lambda x\,d\lambda$，余弦版本同理。

正弦对应奇延拓，适合零函数值端点；余弦对应偶延拓，适合零导数端点。有非齐次边界时，也可保留分部积分产生的边界项直接处理，并非总要先齐次化。

图 P4-8 正弦对应奇延拓，余弦对应偶延拓



图中例子在原点值与一阶导数均为零，两种延拓都与相应齐次条件相容。

4.4 · 教材315—317页

16 二阶导数的边界项，现场分部积分两次

在无穷远相关项消失的条件下，

$$S[u_{xx}] = \lambda u(t,0) - \lambda^2 S[u], \qquad C[u_{xx}] = -u_x(t,0) - \lambda^2 C[u].$$

以余弦为例：第一次分部积分给$-u_x(t,0) + \lambda \int u_x \sin \lambda x dx$，第二次积分的端点正弦为零，余下$-\lambda^2 C[u]$。正弦版本则在第二次积分留下$+\lambda u(t,0)$。

给$u(t,0)$时选正弦，给$u_x(t,0)$时选余弦，常能把已知边界直接带入。 两条公式是本节必须会重建的核心，不能把它们都写成全直线的$-\lambda^2$乘子。

图 P4-9 半直线的二阶导数变换必须保留端点项



全直线的导数乘子不能直接搬到半直线；非齐次边界通过端点项进入像ODE。

4.4 · 教材315—317页

17 原书例3：端点给定Q，像函数就有一个常数源

原题$u_t = a^2 u_{xx}$，$x > 0$，初温零，$u_x(t,0) = Q$，无穷远温度与导数趋零。令$V = C[u]$，则

$$V_t + a^2\lambda^2 V = -a^2 Q, \quad V(0,\lambda) = 0,$$

$$V(t,\lambda) = \frac{Q}{\lambda^2}\left(e^{-a^2\lambda^2 t} - 1\right) = -a^2 Q \int_0^t e^{-a^2\lambda^2 s}\,ds.$$

后一种写法避免在$\lambda = 0$看到假奇点，也方便先反演高斯再对时间积分。于是

$$u(t,x) = -\frac{aQ}{\sqrt{\pi}} \int_0^t s^{-1/2} e^{-x^2/(4a^2 s)}\,ds.$$

4.4 · 教材315—317页

18 把原书积分改写成可直接检查的误差函数形式

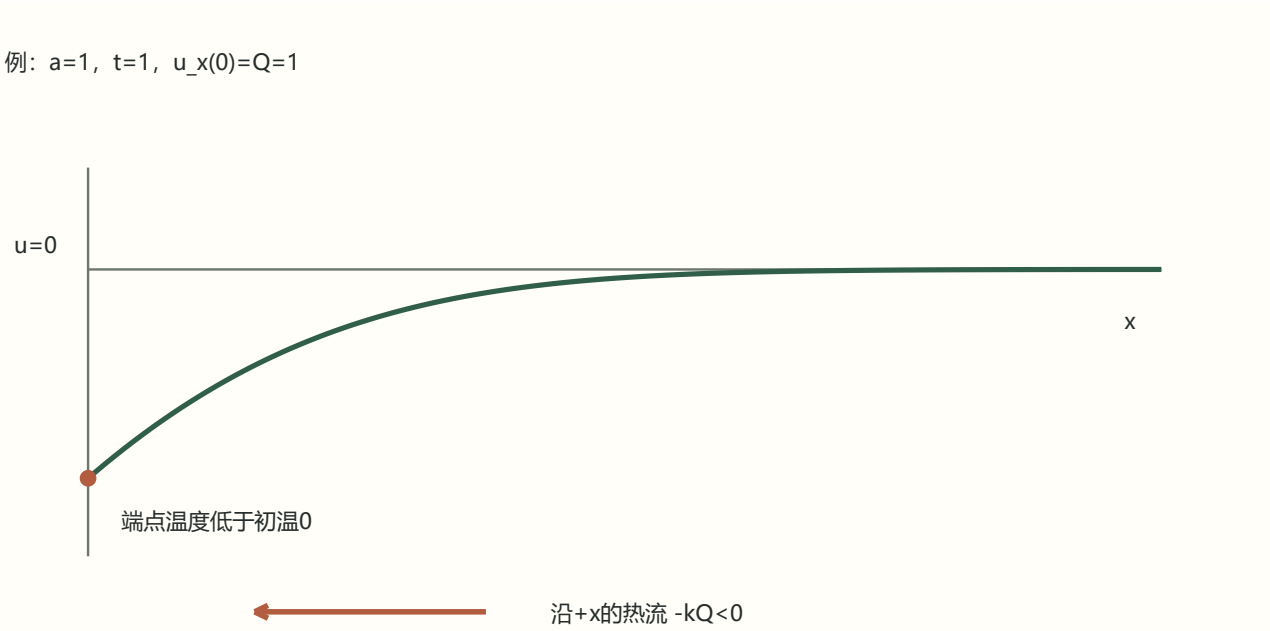
定义$\operatorname{erf} z = (2/\sqrt{\pi})\int_0^z e^{-s^2}ds$、$\operatorname{erfc} z = 1 - \operatorname{erf} z$。令$\eta = x/(2a\sqrt{t})$，上一解等价于

$$u(t,x) = Q\left[x\operatorname{erfc}\eta - \frac{2a\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}}e^{-\eta^2}\right].$$

对x求导，两项中的指数导数抵消，得到$u_x = Q\operatorname{erfc}\eta$，所以边界导数确为$Q$；固定$x>0$、$t\downarrow 0$时解趋零。

$Q>0$时本解为负，是题设正温度梯度的结果；沿$+x$方向的导热流为$-kQ$。不能因为“加热应该为正”就擅自把题设$u_x = Q$改成$-Q$。若改用向杆内输入热流$q>0$，应先写$u_x(0) = -q/k$，再代入$Q = -q/k$。

图 P4-10 正温度梯度与向杆内输入正热流的符号不同



温度曲线斜率为正，热量沿温度降低方向流动；题设Q的正号不代表向杆内加热。

4.4 · 教材315—317页

19 给定端温时用正弦变换，反演出边界响应核

零初温、$u(t,0)=f(t)$时，$W=S[u]$满足$W_t+a^2\lambda^2 W=a^2\lambda f(t)$。积分因子解出$W$再反演，得到

$$u(t,x)=\int_0^t D_a(t-\tau,x)f(\tau)d\tau,\quad D_a(s,x)=\frac{x}{2a\sqrt{\pi}\,s^{3/2}}e^{-x^2/(4a^2s)},\quad x>0.$$

这是原书习题1(3)要求的正弦变换路线。后面用时间拉普拉斯会得到同一个核，方法不同但原问题相同，正好互相检查。

核式先对$x>0$成立；边界应取$x\downarrow 0$的极限。**不能先把分子x置零后宣布边界温度为零**，因为核同时集中到$s=0$，换极限与积分需要判断。

数学物理方程篇·第四章 / 4.5

拉普拉斯变换：先用已知初值消去时间导数

教材317—318页

4.5 · 教材317—318页

20 选变换变量，要看能否填全导数公式里的数据

定义$U(p,x)=\mathcal{L}_t[u](p,x)=\int_0^\infty u(t,x)e^{-pt}dt$。本章$p$表示拉普拉斯复变量，$\lambda$表示傅里叶实频率，分开使用。

$$\mathcal{L}_t[u_t]=pU-\varphi(x),\qquad \mathcal{L}_t[u_{tt}]=p^2U-p\varphi(x)-\psi(x).$$

所以热方程$u_t=a^2u_{xx}$变成$a^2U_{xx}-pU=-\varphi$；波动$u_{tt}=a^2u_{xx}+f$变成$a^2U_{xx}-p^2U=-p\varphi-\psi-F$。

只要初值不是零，就不能直接把u_t写成pU。边界同时变换，如$u(t,0)=g(t)$给$U(p,0)=G(p)$，$u_x(t,0)=q(t)$给$U_x(p,0)=Q(p)$。

4.5 · 教材317—318页

21 为什么本章多数题对时间变换

即使x,t都在半轴上，也不意味着两个变量同样方便。原书例1已知$t=0$的u,u_t，正好填全二阶时间导数公式；若对x变换，空间二阶导数还需要$x=0$的u_x，题中却未给它。

因此选t更直接。**不是“拉普拉斯只能变换时间”，而是优先选择能用现有数据闭合像函数问题的变量。** 原书习题2(1)就可以对空间半轴变量作拉普拉斯。

图 P4-11 优先变换能够填全初值或边界数据的变量



书中半无限弦例题已给位移与速度初值，因此对时间变换更直接。

4.5 · 教材317—318页

22 半无限区域删增长指数，先看是否还有非零特解

热传导的齐次像方程有$e^{\pm x\sqrt{p}/a}$，波动有$e^{\pm px/a}$。在适当右半平面取$\mathrm{Re}\,\sqrt{p}>0$，随$x\to\infty$增长的指数通常与题设有界或衰减要求不符，应删去。

但**删增长指数不等于把所有不衰减项都删掉**。若源或初温是常数，像方程可能有一个非零常数特解，远处解未必趋零。先按题设分清“解有界”“导数趋零”“解趋零”，再定常数。

第一轮会为实$p>0$选择正确根和指数，并知道一般反演在复右半平面进行即可；复杂分支围道细节只在真正需要反演积分时展开。

4.5 · 教材317—318页

23 反演先认结构：乘积卷积指数延迟

需要熟练认出的四种结构为

$$\frac{F(p)}{p^2}\longleftrightarrow\int_0^t(t-\tau)f(\tau)d\tau,\quad e^{-cp}G(p)\longleftrightarrow H(t-c)g(t-c),$$

$$\frac{e^{-c\sqrt{p}}}{p}\longleftrightarrow\operatorname{erfc}\frac{c}{2\sqrt{t}},\quad e^{-c\sqrt{p}}\longleftrightarrow\frac{c}{2\sqrt{\pi}t^{3/2}}e^{-c^2/(4t)},\quad c>0.$$

H为单位阶跃。第一条来自卷积，第二条是延迟定理，后两条是热边界的误差函数对。**e^{-cp}给时间平移，$e^{-c\sqrt{p}}$一般不给一个有限到达时刻。**

数学物理方程篇·第四章 / 4.6

半无限弦上的均匀时间外力

教材318—319页

4.6 · 教材318—319页

24 原书拉普拉斯例1：像方程先求特解再用边界

原题$u_{tt}=a^2u_{xx}+f(t)$，$x>0$，$u(0,x)=u_t(0,x)=0$，$u(t,0)=0$，选空间有界解。令$F=\mathcal{L}[f]$，得到

$$a^2U_{xx}-p^2U=-F(p).$$

常数特解为F/p^2，故$U=C_1e^{-px/a}+C_2e^{px/a}+F/p^2$。删增长项$C_2$；左端$U(p,0)=0$给$C_1=-F/p^2$。于是

$$U(p,x)=\frac{F(p)}{p^2}(1-e^{-px/a}).$$

远处留下F/p^2是正确的：外力作用在整根半无限弦，并没有要求远处位移为零。若强行再令远处为零，反而会与源项不相容。

4.6 · 教材318—319页

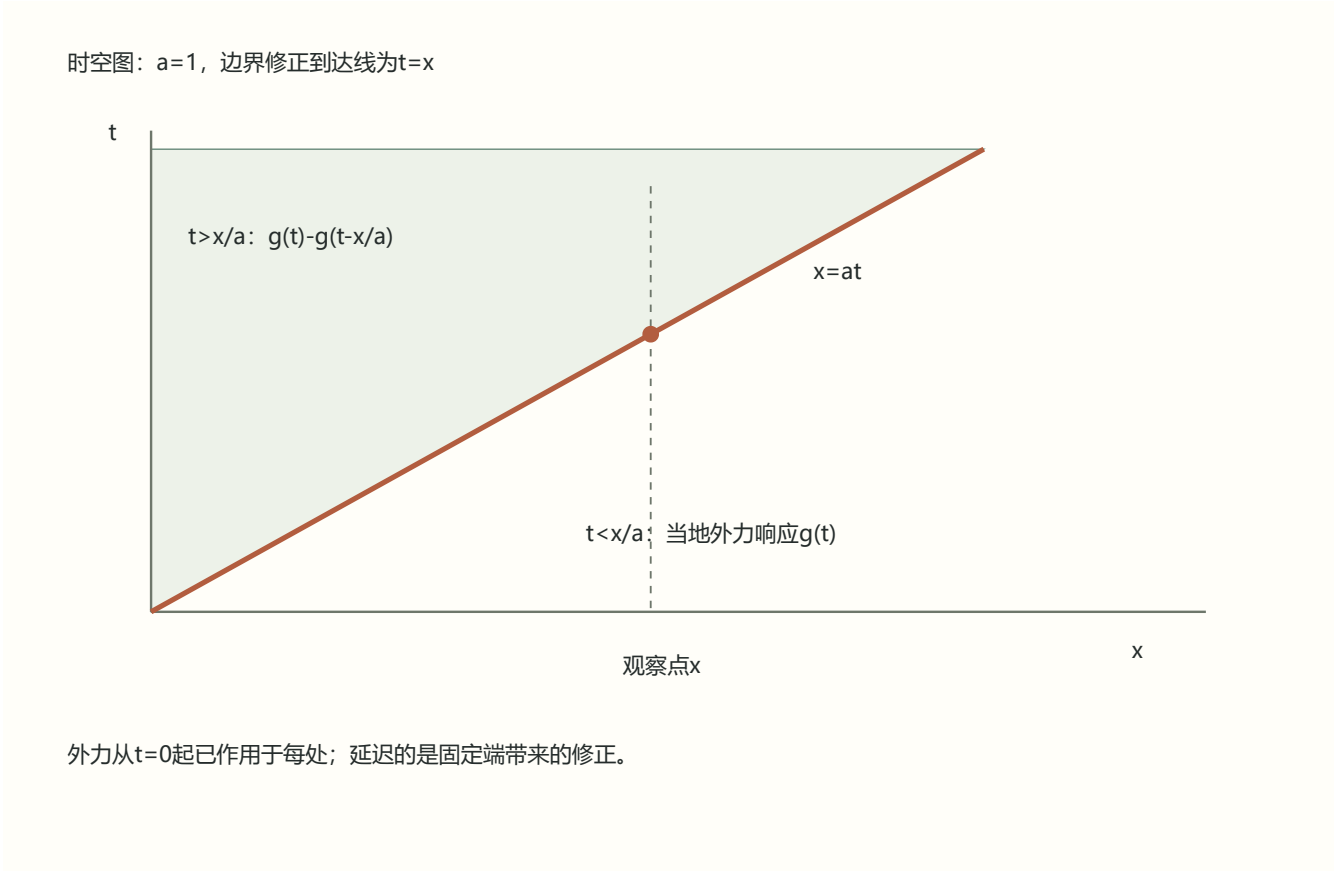
25 先定义g，再应用延迟：一行变成分段解

令$g(t)=\int_0^t(t-\tau)f(\tau)d\tau$，则

$$u(t,x)=g(t)-H(t-x/a)g(t-x/a)=\begin{cases}g(t), & t<x/a,\\ g(t)-g(t-x/a), & t\ge x/a.\end{cases}$$

位于x的点在$t<x/a$时尚未受到端点固定条件传来的影响，先按当地外力响应$g(t)$运动；$t\ge x/a$时再减去边界修正。该分段来自**边界影响的到达**，不是外力在那一刻才开始作用。

图 P4-12 固定端的修正沿x等于at传播，外力则已在全域作用



图中绿色三角区已受到边界影响；斜线右下方尚未受到边界修正，但当地外力并非为零。

4.6 · 教材318—319页

26 常外力完整例子与检查

若$f(t)=F_0$，$g=F_0t^2/2$，因此

$$u(t,x)=\frac{F_0}{2}\left[t^2-H(t-x/a)(t-x/a)^2\right].$$

$x=0$两项相消；固定$x>0$在$t=0$位移与速度均为零。$t<x/a$时$u_{tt}=F_0,u_{xx}=0$；$t>x/a$时$u=F_0tx/a-F_0x^2/(2a^2)$，有$u_{tt}=0,a^2u_{xx}+F_0=0$。

前沿处导数光滑性要按具体数据判断；这里位移和一阶导连续、二阶导分段，不能不加说明地称为全区域C^2经典解。

数学物理方程篇·第四章 / 4.7

半无限杆给定端温与误差函数

教材319—321页

4.7 · 教材319—321页

27 原书例2：平方根指数来自热方程的一阶时间导数

考虑$u_t = a^2 u_{xx}$、$x>0$、初温零、$u(t,0)=f(t)$，选远处衰减解。时间变换得

$$a^2 U_{xx} - pU = 0, \quad U(p,0)=F(p), \qquad U(p,x) = F(p) e^{-x\sqrt{p}/a}.$$

对比波动的$e^{-px/a}$：热像方程里是p，波动是p^2，所以空间指数分别是$\sqrt{p}/a$和p/a。这一步解释了扩散没有有限波前，而理想波动有有限传播速度。

4.7 · 教材319—321页

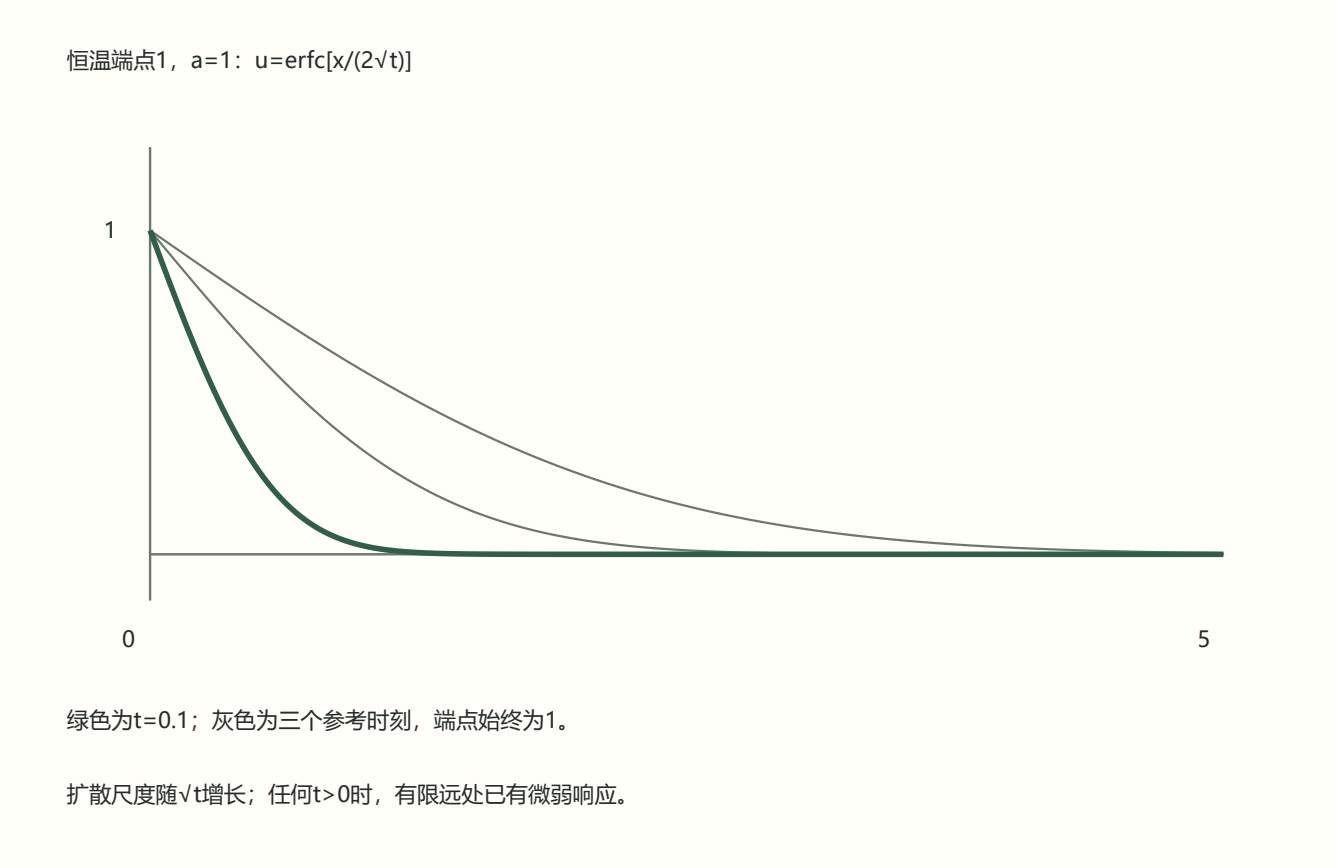
28 恒温阶跃：erfc公式从核积分得到

若$f(t)=U_0$、$t>0$，$F=U_0/p$，则

$$u(t,x) = U_0 \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right).$$

检查：$x\downarrow 0$得U_0；固定$x>0$、$t\downarrow 0$得0；固定$t>0$、$x\to\infty$得0。扩散的特征长度为$a\sqrt{t}$，不是at。任意$t>0$时每个有限x已有很小但非零的响应。

图 P4-13 恒温阶跃产生erfc温度剖面，扩散尺度随根号t增长



图示 t=0.1；当前在x=1处温度约为0.02535；没有严格的有限到达波前。

初温零与端点立刻跃到U_0在角点$(0,0)$不相容，公式按内部初值及$t>0$边界理解。这是具体数据的性质，不是反演算错。

4.7 · 教材319—321页

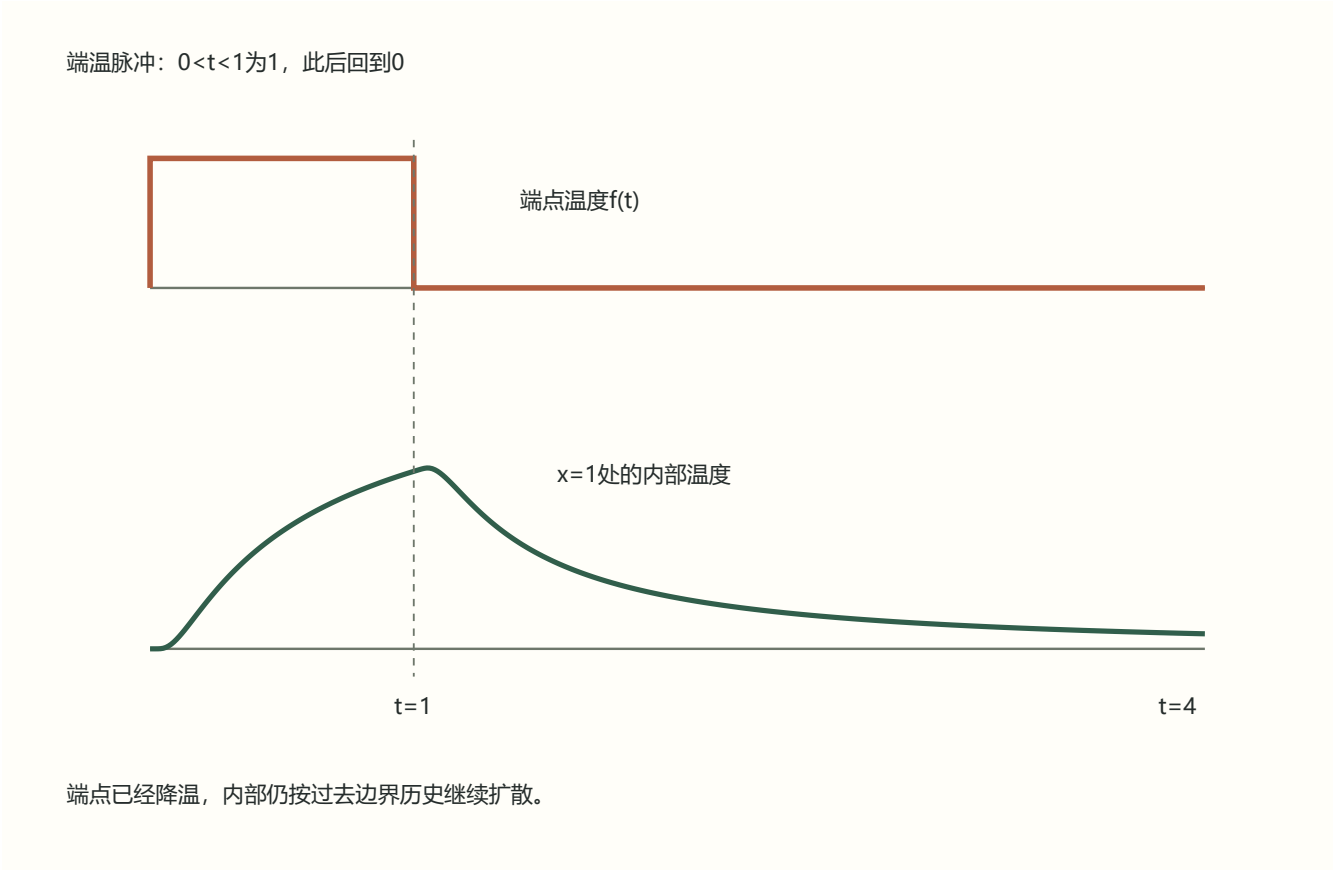
29 任意端温是过去历史与边界热核的卷积

对$x>0$，记$E_a(t,x)=\operatorname{erfc}[x/(2a\sqrt{t})]$，则$\partial_t E_a = D_a$。因此

$$u(t,x)=\int_0^t f(\tau)D_a(t-\tau,x)\,d\tau.$$

若f可微，还可写成$u=f(0+)E_a(t,x)+\int_0^t f'(\tau)E_a(t-\tau,x)\,d\tau$。当$f$有跳跃时，分成阶跃响应更方便，不必把普通导数公式硬套过去。

图 P4-14 端温降回零以后，杆内仍保留热量



下图是E(t,1)-H(t-1)E(t-1,1)，撤去端温后并不会立刻处处为零。

例如端温加热到1后在T时降回零，$f=H(t)-H(t-T)$，有$u=E_a(t,x)-H(t-T)E_a(t-T,x)$。降温后内部还存有热量，不会随着端点立刻一起归零。

4.7 · 教材319—321页

30 为什么热边界核不能直接代x等于零

每个固定$s>0$都有$D_a(s,x)\to 0$，但$\int_0^\infty D_a(s,x)ds=1$，$x\downarrow 0$时权重向$s=0$集中。边界温度正是由这团越来越尖的时间权重恢复。

讲这一点是为了避免错误交换极限与积分。第一轮不需要证明所有近似恒等算子的定理，只要记住：**核公式用于内部，边界用极限或原像条件检查；不要先把一个集中核的参数置零。**

误差函数与Fresnel积分的标准定义可查NIST DLMF定义页。本讲义公式已内嵌，阅读和做题不依赖联网。

数学物理方程篇·第四章 / 4.8

有限弦的边界驱动与留数反演

教材321—323页

4.8 · 教材321—323页

31 原书例3：左端固定，右端给斜率，不是给位移

原题为$u_{tt}=a^2u_{xx}$，$0<x<l$，零初值，

$$u(t,0)=0,\qquad u_x(t,l)=A\sin\Omega t.$$

时间变换后$a^2U_{xx}-p^2U=0$，$U(p,0)=0$、$U_x(p,l)=A\Omega/(p^2+\Omega^2)$。由$U=C\sinh(px/a)$，得到

$$U(p,x)=\frac{Aa\Omega\sinh(px/a)}{p(p^2+\Omega^2)\cosh(pl/a)}.$$

右端求导会带p/a，所以分母多出p。 如果把原题当作$u(t,l)=A\sin\Omega t$，传递函数和固有频率都会改变。

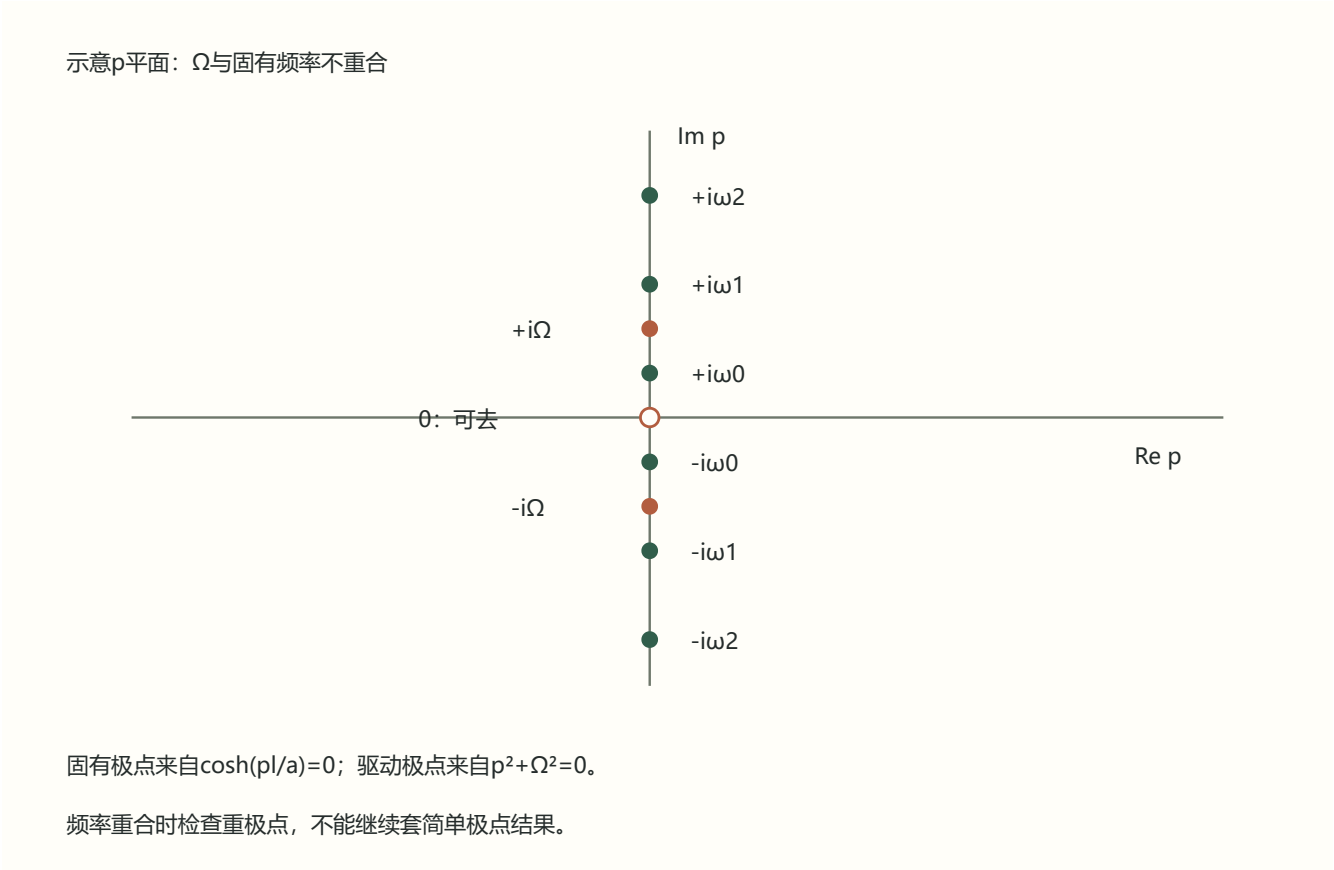
4.8 · 教材321—323页

32 极点位置把上一章的混合边界频谱重新带回来

$\cosh(pl/a)=0$给$p=\pm i\omega_n$，其中$k_n=(n+1/2)\pi/l$、$\omega_n=ak_n$、$n\ge0$。驱动还给$p=\pm i\Omega$。$p=0$虽然出现在分母，但$\sinh(px/a)\sim px/a$，所以是可去点，不是一个必须加留数的极点。

教材假设$\Omega\neq\omega_n$，这些非可去极点才分开为简单极点。在适当反演条件下，留数给驱动频率项与全部固有模态项。无穷极点展开还需相应收敛与围道论证，不能只看见分母就不检查地把所有零点当简单极点相加。

图 P4-15 驱动极点与固有极点分开，可去点不能误算留数



极点位置仅作示意，图中固有频率比例为1:3:5；p=0的分母零点被分子抵消。

4.8 · 教材321—323页

33 留数结果可以用特征展开独立校验

非共振时可选一个同时满足方程和边界的周期特解

$$v(t,x)=\frac{Aa}{\Omega\cos(\Omega l/a)}\sin(\Omega x/a)\sin\Omega t.$$

令$u=v+w$，则w左D右N齐次，$w(0,x)=0$、$w_t(0,x)=-Aa\sin(\Omega x/a)/\cos(\Omega l/a)$。投影得

$$u(t,x)=v(t,x)+\sum_{n\ge0}D_n\sin\omega_n t\sin k_n x,\qquad D_n=\frac{2Aa\Omega(-1)^n}{lk_n(\Omega^2-\omega_n^2)}.$$

这与教材把n改记为$k-1$后的留数级数一致。第一项满足非齐次斜率，后面每项在右端斜率零；初位移零，初速度由补偿级数抵消。由此能分别检查驱动项、模态频率和系数符号。

4.8 · 教材321—323页

34 共振时回到ODE或重极点，不能保留零分母

若$\Omega=\omega_N$，驱动极点与固有极点重合，通常形成二阶极点，时间解出现t乘振荡。上一节的周期特解因$\cos(\Omega l/a)=0$不适用，不能继续保留其零分母。

始终可选线性提升$v=Ax\sin\Omega t$，使$w=u-v$满足齐次混合边界，并有新源$A\Omega^2 x\sin\Omega t$、初速度$-A\Omega x$。按混合模态展开，每个q_n解受迫振子ODE；共振项单独求，或在拉普拉斯域算重极点留数。

讲这里是为了说明教材排除频率重合的假设实际用在哪里。基础题先完成非共振情形；必须会发现共振、选择可用的提升、避免零分母。

数学物理方程篇·第四章 / 4.9

原书两组十个小题的路线与关键结果

教材323—324页

4.9 · 教材323—324页

35 习题1的三个傅里叶问题

1(1) 上半平面调和。 对x变换得$U_{yy}-\lambda^2U=0$，边界$U(\lambda,0)=\widehat{f}$；由远处衰减选$U=\widehat{f}e^{-|\lambda|y}$。反演得到

$$u(x,y)=\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}}\frac{y\,f(\xi)}{(x-\xi)^2+y^2}\,d\xi.$$

这是半平面的泊松积分核，解的方程是拉普拉斯方程。数据要与题设远处衰减要求相容，不能一边给整个边界恒为1、一边还要求所有无穷远方向解趋零。

1(2) 有源全直线热方程。 初温零，答案就是4.2的源项双积分；先解$\widehat{u}_t+a^2\lambda^2\widehat{u}=\widehat{f}$，再反演，不能漏掉过去时间积分。

1(3) 半直线给端温。 按题目要求用正弦变换，$W_t+a^2\lambda^2W=a^2\lambda\varphi(t)$，初值零，得到$u=D_a*\varphi$。完整推导见4.4，与4.7时间拉普拉斯法相同。

4.9 · 教材323—324页

36 习题2的第1至3小题

2(1) $u_{xy}=1$、$u(0,y)=y+1$、$u(x,0)=1$。对y拉普拉斯，$\mathcal{L}_y[u_y]=pU-1$，再对x求导，得$pU_x=1/p$。边界$U(0,p)=1/p^2+1/p$，故$U=x/p^2+1/p^2+1/p$，反演$u=xy+y+1$。

2(2) 杆$0<x<l$、左绝热、右恒温u_0，初温u_1，方程$u_t=a^2u_{xx}$。像函数为

$$U(p,x)=\frac{u_1}{p}+\frac{u_0-u_1}{p}\frac{\cosh(x\sqrt{p}/a)}{\cosh(l\sqrt{p}/a)}.$$

反演或留数给

$$u=u_0+\sum_{n\ge 0}\frac{2(u_1-u_0)(-1)^n}{lk_n}e^{-a^2k_n^2t}\cos k_nx,\quad k_n=(n+1/2)\pi/l.$$

长期趋u_0。若$u_1\neq u_0$，初时右端角点不连续。

2(3) 半直线$u_t=a^2u_{xx}-hu$，$h>0$、初温b、端点零温、远处$u_x\to 0$。时间变换给

$$U=\frac{b}{p+h}\left[1-e^{-x\sqrt{p+h}/a}\right],\qquad u=be^{-ht}\operatorname{erf}\frac{x}{2a\sqrt{t}}.$$

注意远处温度为be^{-ht}，题设只要求导数趋零，不能擅自要求温度趋零。

4.9 · 教材323—324页

37 习题2的第4至6小题

2(4) 半无限弦初位移零、初速度常数b、左端固定、远处$u_x\to 0$。像方程给$U=b(1-e^{-px/a})/p^2$，所以

$$u(t,x)=b[t-H(t-x/a)(t-x/a)]=\begin{cases}bt, & x\ge at,\\ bx/a, & 0\le x<at.\end{cases}$$

前沿上位移连续、导数分段，按适当较弱或分区意义理解。

2(5) $0<x<4$两端零温，$u_t=u_{xx}$，初温$6\sin(\pi x/2)+3\sin\pi x$。时间变换或直接分模态得
$u=6e^{-\pi^2t/4}\sin(\pi x/2)+3e^{-\pi^2t}\sin\pi x$。

2(6) $0<x<2$两端绝热，初温$4\cos\pi x-2\cos 3\pi x$，解为$u=4e^{-\pi^2t}\cos\pi x-2e^{-9\pi^2t}\cos 3\pi x$。平均值为零，所以没有常数项；一般绝热初温不能都删常数模态。

4.9 · 教材323—324页

38 习题2第7小题：径向三维波动化成一维

原题$u_{tt}=a^2\Delta_3u$，径向对称，$u(0,r)=0$、$u_t(0,r)=1/(1+r^2)$、原点有界。令$v=ru$，则
$v_{tt}=a^2v_{rr}$，$v(t,0)=0$，初速度$r/(1+r^2)$。

时间拉普拉斯满足$a^2V''-p^2V=-r/(1+r^2)$。半轴D边界的解可写

$$V(p,r)=\int_0^\infty\frac{e^{-p|r-s|/a}-e^{-p(r+s)/a}}{2ap}\frac{s}{1+s^2}ds.$$

用延迟反演，把两段积分合并成奇延拓的一维波公式：$v=(2a)^{-1}\int_{r-at}^{r+at} s/(1+s^2)ds$。最终

$$u(t,r)=\frac{1}{4ar}\ln\frac{1+(r+at)^2}{1+(r-at)^2},\quad r>0,\qquad u(t,0)=\frac{t}{1+a^2t^2}.$$

原点值由极限求，不是把$1/r$直接判为发散。教材提示的余弦积分也可经频率求导辅助正弦变换；这里给出了时间拉普拉斯的闭合路线。

数学物理方程篇·第四章 / 4.10

选方法与交卷前的检查

全章310—324页

4.10 · 全章310—324页

39 四类变换的选择表

已知区域与数据	常用变换	必须保留的条件项
全直线空间，初值已知	对x傅里叶	初值也做空间变换
半直线给$u(t,0)$	对x正弦	$+\lambda u(t,0)$
半直线给$u_x(t,0)$	对x余弦	$-u_x(t,0)$
时间从0起，初值已知	对t拉普拉斯	$-u(0,x)$、$-pu(0,x)-u_t(0,x)$
有限区间非齐次边界	时间拉普拉斯或提升后模态	变换后的全部边界，及反演极点

图 P4-16 按区域与已知数据选择变换，再检查反演结构



先把像函数问题闭合，再追求复杂反演；不确定符号时从定义或分部积分重建。

4.10 · 全章310—324页

40 掌握标准：先会闭合像函数问题，再追求复杂反演

第一轮必须能独立推导全直线热核、两条半轴二阶导数变换、半无限杆恒温响应、半无限弦延迟表达。能把原书有限弦像函数正确写出来，并判断可去点和共振，说明主干已经连通。

交卷前检查五件事：原PDE的导数阶数；原初值；原边界；无穷远到底要求值还是导数；所有分母为零或参数趋零的情形。核式在$t = 0$或边界的恢复要取极限，不能直接代奇异参数。

可以暂缓的内容：一般分布理论、振荡核的完整收敛证明、无穷极点反演的全套围道估计。不能暂缓的内容：正负号约定、边界项、初值项、卷积变量、延迟与扩散的区别。

数学物理方程篇·第四章 / 4.11

二十八道自编检查题与完整解析

独立编号不对应原书题号

4.11 · 独立编号不对应原书题号 · 自编检查题

练习1 从定义决定一阶导数的符号

本书$\widehat{f}=\int f(x)e^{i\lambda x}dx$。在端点项消失时推导$\mathcal{F}[f']$和$\mathcal{F}[f'']$。

展开解析

分部积分给$\int f'e^{i\lambda x}dx=-i\lambda\widehat{f}$。再用一次，$\mathcal{F}[f'']=(-i\lambda)^2\widehat{f}=-\lambda^2\widehat{f}$。一阶是负号，来自正向指数的正号；不能混用另一种约定。

4.11 · 独立编号不对应原书题号 · 自编检查题

练习2 指数调制怎样移动频率

若$\mathcal{F}[f](\lambda)=F(\lambda)$，求$\mathcal{F}[e^{3ix}f(x)]$和$\mathcal{F}[f(x-2)]$。

展开解析

第一式$F(\lambda+3)$，因为指数合并为$e^{i(\lambda+3)x}$。第二式令$y=x-2$，得到$e^{2i\lambda}F(\lambda)$。不要把频率移动方向与空间移动因子的符号混记。

4.11 · 独立编号不对应原书题号 · 自编检查题

练习3 热像函数的初值

对$u_t=3u_{xx}$、全直线初温φ，写出空间傅里叶像问题与解。

展开解析

$\widehat{u}_t=-3\lambda^2\widehat{u}$，$\widehat{u}(0,\lambda)=\widehat{\varphi}(\lambda)$，因此$\widehat{u}=\widehat{\varphi}e^{-3\lambda^2t}$。未乘初温变换的$e^{-3\lambda^2t}$只是核的像，不是任意初温的解。

4.11 · 独立编号不对应原书题号 · 自编检查题

练习4 热核归一化

写出$u_t = 3u_{xx}$的全直线热核并求其空间积分。

展开解析

$G = \exp[-x^2/(12t)]/\sqrt{12\pi t}$。令$y = x/\sqrt{12t}$，积分为$\pi^{-1/2}\int_{\mathbb{R}} e^{-y^2}dy = 1$。因此卷积不会凭空改变可积初温的总积分。

4.11 · 独立编号不对应原书题号 · 自编检查题

练习5 高斯初温的完整解

解$u_t = u_{xx}$、全直线初温e^{-2x^2}。

展开解析

代$\beta = 2, \kappa = 1$得到$u = (1+8t)^{-1/2}\exp[-2x^2/(1+8t)]$。$t = 0$恢复初温；峰值下降、宽度增加，总积分保持$\sqrt{\pi/2}$。

4.11 · 独立编号不对应原书题号 · 自编检查题

练习6 高频衰减有多快

热方程中频率$\lambda = 1$与$\lambda = 3$的初始幅度相同，扩散率1，时刻t的幅度因子分别是多少？

展开解析

分别为e^{-t}与e^{-9t}，高频与低频的幅度比为e^{-8t}。不是频率大三倍就只衰减快三倍，指数系数按频率平方增长。

4.11 · 独立编号不对应原书题号 · 自编检查题

练习7 有源热方程不能漏时间积分

零初温的全直线$u_t = \kappa u_{xx} + f(t,x)$，写解公式，说明内外两层积分的对象。

展开解析

$u = \int_0^t \int_{\mathbb{R}} G_\kappa(t-\tau, x-\xi) f(\tau,\xi) d\xi d\tau$。内层对源位置$\xi$，外层对过去时间$\tau$。核使用剩余演化时间$t-\tau$，不能写成固定的$G_\kappa(t)$再乘当前源。

4.11 · 独立编号不对应原书题号 · 自编检查题

练习8 梁的时间频率

解$u_{tt} + 4u_{xxxx} = 0$，初形$\cos 3x$、初速度零。

展开解析

这里$a=2$，波数$k=3$，梁角频率$ak^2 = 18$，所以$u = \cos 18t \cos 3x$。$u_{tt} = -324u$，$4u_{xxxx} = 4\cdot 81 u = 324u$，相加为零。

4.11 · 独立编号不对应原书题号 · 自编检查题

练习9 两个核的性质能否通用

为什么不能把梁振动核K_a当作热核那样的正权平均?

展开解析

K_a含$\cos[x^2/(4at)] + \sin[x^2/(4at)]$，会变号，且作为普通函数并非绝对可积的概率密度。热核则非负、积分1。两者时间乘子分别是$\cos(at\lambda^2)$和$e^{-\kappa t\lambda^2}$，物理行为不同。

4.11 · 独立编号不对应原书题号 · 自编检查题

练习10 半轴二阶导数的两条公式

在无穷远端点项消失时，写出$S[u_{xx}]$、$C[u_{xx}]$。

展开解析

$S[u_{xx}]=\lambda u(t,0)-\lambda^2 S[u]$，$C[u_{xx}]=-u_x(t,0)-\lambda^2 C[u]$。前者需要已知端点值，后者需要端点导数；两次分部积分即可重建，不要一律丢边界项。

4.11 · 独立编号不对应原书题号 · 自编检查题

练习11 选正弦还是余弦

零初温半无限热杆，分别给$u(t,0)=g(t)$和$u_x(t,0)=q(t)$。写最方便的空间变换及像ODE。

展开解析

给值选正弦，$W_t+a^2\lambda^2 W=a^2\lambda g(t)$；给导数选余弦，$V_t+a^2\lambda^2 V=-a^2 q(t)$。两者初值均为零。非零边界直接进入ODE右侧，不一定要先作提升。

4.11 · 独立编号不对应原书题号 · 自编检查题

练习12 正温度梯度对应什么符号

$u_t=u_{xx}$，半轴零初温，$u_x(t,0)=2$。写解并检查端点导数。

展开解析

$u=2[x\,\mathrm{erfc}(x/(2\sqrt{t}))-2\sqrt{t/\pi}e^{-x^2/(4t)}]$。求导得$u_x=2\,\mathrm{erfc}(x/(2\sqrt{t}))$，端点导数为2，温度相对初值为负。这与沿杆内正向热流$-ku_x$为负相符。

4.11 · 独立编号不对应原书题号 · 自编检查题

练习13 拉普拉斯导数保留初值

波动$u_{tt}=9u_{xx}+f$，初位移φ、初速度ψ。写时间拉普拉斯后的空间ODE。

展开解析

$p^2U-p\varphi-\psi=9U_{xx}+F$，所以$9U_{xx}-p^2U=-p\varphi-\psi-F$。这里$F=\mathcal{L}_t[f]$可依赖$x$。初速度不能与初位移一样再乘一个$p$。

4.11 · 独立编号不对应原书题号 · 自编检查题

练习14 两种指数不能都叫时间延迟

比较e^{-2p}/p与$e^{-2\sqrt{p}}/p$的反演。

展开解析

第一式为$H(t-2)$；第二式为$\operatorname{erfc}(1/\sqrt{t})$，$t>0$。前者在$t<2$严格零，后者任意$t>0$都为正。一个是有限延迟，一个是扩散响应。

4.11 · 独立编号不对应原书题号 · 自编检查题

练习15 半无限弦边界影响到达时间

波速$a=2$、均匀外力$f=1$、初始静止、左端固定。在$x=3$处求$u(t,3)$。

展开解析

到达时间$x/a=3/2$，$g=t^2/2$。因此$t<3/2$时$u=t^2/2$；$t\ge 3/2$时$u=[t^2-(t-3/2)^2]/2=3t/2-9/8$。前段外力已经在作用，尚未到达的是固定端的修正影响。

4.11 · 独立编号不对应原书题号 · 自编检查题

练习16 常初速度的半无限弦

波速$a=2$，初位移零、初速度$b=3$、左端固定，求解并说明波前。

展开解析

$u=3[t-H(t-x/2)(t-x/2)]$，即$x\geq 2t$时$u=3t$，$0\leq x<2t$时$u=3x/2$。波前$x=2t$位移连续，一阶导数分段；在两个区域分别满足波动方程，前沿按适当较弱意义理解。

4.11 · 独立编号不对应原书题号 · 自编检查题

练习17 恒温端点的erfc响应

$u_t=4u_{xx}$，半轴初温零，端点恒温5，写解与特征扩散长度。

展开解析

$a=2$，所以$u=5\,\mathrm{erfc}[x/(4\sqrt{t})]$。扩散长度按$a\sqrt{t}=2\sqrt{t}$增长。端点极限5，固定内部点初时趋零，远处趋零。

4.11 · 独立编号不对应原书题号 · 自编检查题

练习18 端温脉冲撤掉后会怎样

$u_t=u_{xx}$，零初温，端温在$0<t<1$等于1、之后为0。求$x>0$的解。

展开解析

令$E(t,x)=\mathrm{erfc}[x/(2\sqrt{t})]$。解$u=E(t,x)-H(t-1)E(t-1,x)$。端点在$t>1$的极限为$1-1=0$，内部仍有尚未消散的温升。不能在撤去端温时直接把全杆解置零。

4.11 · 独立编号不对应原书题号 · 自编检查题

练习19 为什么不能先把边界核的x置零

$D(s,x)=xe^{-x^2/(4s)}/(2\sqrt{\pi}s^{3/2})$。说明$x\downarrow 0$时点值趋零与边界卷积恢复非零端温为何不矛盾。

展开解析

对固定$s>0$确实趋零，但$\int_0^\infty D(s,x)ds=1$，权重不断集中到$s=0$。点值极限不能在这里直接移入积分；边界应取整个卷积的$x\downarrow 0$极限。它是集中核的典型行为。

4.11 · 独立编号不对应原书题号 · 自编检查题

练习20 上半平面泊松核

求$y>0$内调和函数，边界$f(x)=1/(1+x^2)$，远处衰减。

展开解析

本约定下$\widehat{f}=\pi e^{-|\lambda|}$。向上延拓乘$e^{-|\lambda|y}$，像为$\pi e^{-(1+y)|\lambda|}$，反演得$u=(1+y)/[(1+y)^2+x^2]$。$y=0$恢复边界，可直接验$u_{xx}+u_{yy}=0$。

4.11 · 独立编号不对应原书题号 · 自编检查题

练习21 不把全域常数初温的特解删掉

半轴$u_t=a^2u_{xx}-hu$，初温b、端点零温，远处要求$u_x\to 0$。写解及其远处极限。

展开解析

$u=be^{-ht}\operatorname{erf}[x/(2a\sqrt{t})]$，所以$x\to\infty$时趋$be^{-ht}$，导数趋零。它满足题设，不能因解不趋零而删掉常数特解。若题目改要求温度趋零，就必须重新检查数据和条件是否相容。

4.11 · 独立编号不对应原书题号 · 自编检查题

练习22 有限混合边界热杆

$u_t=u_{xx}$、$0<x<1$，$u_x(t,0)=0, u(t,1)=2$，初温恒为1。写级数及长期极限。

展开解析

减稳态2，余项初温-1。$k_n=(n+1/2)\pi$、$X_n=\cos k_n x$，系数$-2(-1)^n/k_n$。所以$u=2-\sum_{n\ge 0}2(-1)^n e^{-k_n^2 t}\cos k_n x/k_n$，长期趋2。初时右端数据不匹配，按内部初值理解。

4.11 · 独立编号不对应原书题号 · 自编检查题

练习23 写出原书有限弦的像函数

$u_{tt}=a^2u_{xx}$、零初值、$u(t,0)=0, u_x(t,l)=A\sin\Omega t$。求$U(p,x)$。

展开解析

像方程解$U=C\sinh(px/a)$。右端导数为$C(p/a)\cosh(pl/a)=A\Omega/(p^2+\Omega^2)$，故$U=Aa\Omega\sinh(px/a)/[p(p^2+\Omega^2)\cosh(pl/a)]$。分母$p$来自链式求导。

4.11 · 独立编号不对应原书题号 · 自编检查题

练习24 可去点还是极点

对上一题的U，判断$p=0$，并给出$\cosh(pl/a)$产生的极点位置。

展开解析

$\sinh(px/a)\sim px/a$，故$p=0$可去，极限为Ax/Ω（$\Omega>0$）。$\cosh(pl/a)=0$给$p=\pm ia(n+1/2)\pi/l$，即混合边界的固有频率；此外驱动项有$\pm i\Omega$。

4.11 · 独立编号不对应原书题号 · 自编检查题

练习25 共振会怎样改变反演

有限弦右端驱动频率等于某一固有频率时，为什么不能继续用简单极点级数？给一个可用的提升。

展开解析

驱动极点与固有极点重合，通常成为二阶极点，反演产生t乘振荡项。可取$v = Ax\sin\Omega t$满足两端原边界，$w = u - v$齐次化后用模态ODE求解。不能在非共振结果中留下$\Omega^2 - \omega_N^2 = 0$的分母。

4.11 · 独立编号不对应原书题号 · 自编检查题

练习26 混合偏导的拉普拉斯题

求$u_{xy} = 2$，$u(0,y) = 3y + 1$、$u(x,0) = 1$。

展开解析

对y拉普拉斯，$pU_x = 2/p$，$U(0,p) = 3/p^2 + 1/p$，所以$U = 2x/p^2 + 3/p^2 + 1/p$。反演$u = 2xy + 3y + 1$，直接求混合偏导为2，两个边界都满足。

4.11 · 独立编号不对应原书题号 · 自编检查题

练习27 三维径向波在原点取极限

对$u = [4ar]^{-1}\ln\{[1+(r+at)^2]/[1+(r-at)^2]\}$，求$r\downarrow 0$极限，并检查初速度。

展开解析

分子在$r=0$为零，对r求导得$4at/(1+a^2t^2)$，除以$4a$，极限$t/(1+a^2t^2)$。对t求导再令$t=0$，$r>0$时得$1/(1+r^2)$，原点为1，与初速度连续匹配。

4.11 · 独立编号不对应原书题号 · 自编检查题

练习28 分辨遗漏了什么

有人对半轴热方程直接写$C[u_{xx}] = -\lambda^2 C[u]$；另有人对非零初位移波动直接写$\mathcal{L}[u_{tt}] = p^2 U$。各漏了什么?

展开解析

前者漏端点项$-u_x(t,0)$，只有该导数为零时才可省。后者漏$-pu(0,x) - u_t(0,x)$，只有两条初值都为零才可省。变换后ODE看起来再熟悉，也不能替代对原数据的逐项带入。

来源、编排与掌握要求

依据用户提供的严镇军《数学物理方法》扫描本数学物理方程篇·第四章整理；正文印刷页310—323上部，章末习题323—324。扫描PDF文件页序等于印刷页码加6。按原书节序覆盖各主题，以重新讲解、推导主线和例题说明组织，未逐字复制原文。自编检查题与原书习题分开编号，原书题号可在本章习题路线中查找；本文件不声称是全部原书习题的逐题答案册。

第一轮优先掌握能独立做题所需的概念、步骤和适用条件；背景、证明及拓展均说明用途和暂缓深究的边界。数学物理方程篇·第四章含28道自编检查题及完整解析。公式与SVG内嵌，可离线阅读；屏幕答案默认折叠，打印时自动展开。整理日期：2026年10月22日。