数学物理方法 / 复变函数

第二章学习讲义

复变数函数

极限与连续 → 可导与解析 → C-R → 初等函数与分支。按教材顺序展开概念、例题、证明主线与解题条件；每章附原书习题路线和自编检查题。

严镇军教材配套讲读　　教材24—47页　　8道自编检查题　　离线SVG公式与图解

对应教材印刷第24—47页，正文第24—44页，习题第45—47页。本章有两条任务：判断一个函数在哪里解析；正确计算复指数、三角、对数和一般幂。先把这两条做熟，后面的积分与级数才有适用对象。

学完的标准 能写出 u, v，用差商或柯西—黎曼方程判断可导点与解析域，计算导数时写清定义域；能列出对数、幂的全部值，并说明所选分支。对“只在一个点满足方程”保持敏感。

学习顺序：先跟着例题写关键步骤，再独立完成检查题，最后按习题路线回到原书。证明段落均说明用途，不要求第一轮逐行背诵。

本章目录

2.1 复变数函数	教材24—27页
2.2 函数的极限和连续性	教材27—29页
2.3 导数和解析函数的概念	教材29—31页
2.4 柯西—黎曼方程	教材32—35页
2.5 初等函数	教材35—44页
2.6 习题路线与检查题	原书习题45—47页

第二章 / 2.1

复变数函数

教材24—27页

2.1 · 教材24—27页

01 从一个平面映到另一个平面

复函数 $w=f(z)$ 的输入和输出各有两个实坐标。写 $z=x+iy$、$w=u+iv$，就相当于两个实二元函数：

$$u=u(x,y),\qquad v=v(x,y).$$

例如 $w=z^2$ 给出 $u=x^2-y^2$、$v=2xy$。$w=\bar{z}$ 给出 $u=x, v=-y$。$w=|z|$ 也确实是复函数，只是它的值都落在非负实轴上；“复函数”不代表“一定含虚数值”，更不代表“一定解析”。

单值与一一不是同一件事 单值说每个输入只给一个输出。z^2 是单值的，但 1 与 -1 都映成1，所以在全平面不是一一映射。求逆时出现平方根的两个值，正是这个原因。教材中的“多值函数”可先理解为一个输入对应多个候选值的关系；要讨论解析性，通常必须先选单值分支。

2.1 · 教材24—27页

02 求像集：代数消元与模角变换各有用途

对 $w=z^2$，直线 $x=c\neq 0$ 满足 $u=c^2-y^2, v=2cy$，消去 y：

$$u=c^2-\frac{v^2}{4c^2}.$$

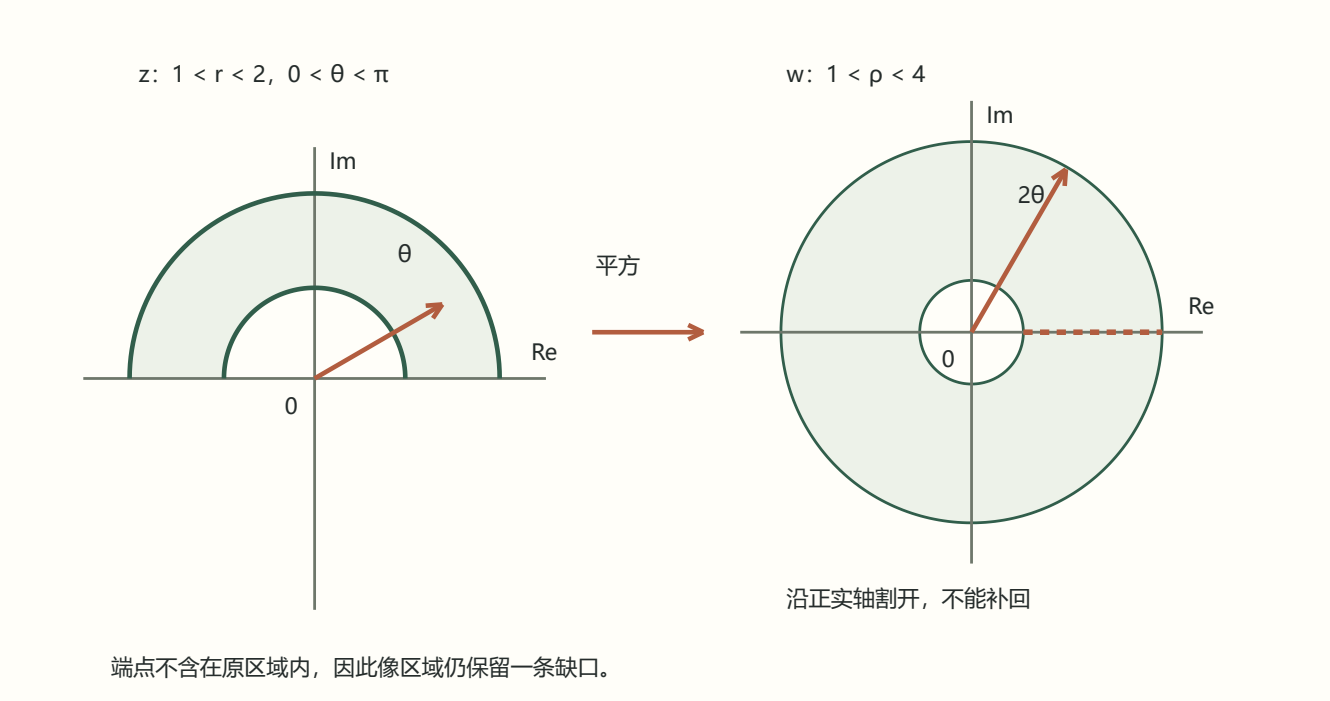
所以它变成开口向左的抛物线。$x=0$ 时不能除以 c，应单独代入：$u=-y^2, v=0$，像为非正实轴。类似地，$y=c\neq 0$ 变为开口向右的抛物线。

如果原集合已经由半径和角度描述，就用极坐标。教材的上半圆环

$$1<|z|<2,\qquad 0<\theta<\pi$$

经平方后满足 $1<|w|<4$、$0<2\theta<2\pi$，像为**沿正实轴割开的圆环**。正实轴不能补回去，因为取得那里的值要求原点在被排除的实轴上。

图 2-1 平方映射使半径平方、角度加倍



半径平方：ρ=r²；角度加倍：φ=2θ。

做题模板 先写变换关系，再保留所有参数范围，消元或变换模角，最后检查是否漏点。只求出一个曲线方程而不检查参数覆盖范围，可能把半条曲线写成整条。

第二章 / 2.2

函数的极限和连续性

教材27—29页

2.2 · 教材27—29页

03 复极限要求所有路径一致

$\lim_{z\to a} f(z)=L$ 的意思是：z 只要足够接近 a，无论从哪条路径来，$f(z)$ 都足够接近 L。形式为

$$0<|z-a|<\delta \quad\Longrightarrow\quad |f(z)-L|<\varepsilon.$$

与数列极限一样，它等价于实部、虚部这两个二元函数同时趋于相应值。

证明不存在 找两条路径得到不同结果。例如 $f(z)=\bar{z}/z$（$z\neq 0$），沿实轴取 $z=t$ 得1，沿虚轴取 $z=it$ 得 -1，故 $z\to 0$ 时没有极限。

证明存在 只检查实轴和虚轴远远不够。例 $g(x,y)=xy/(x^2+y^2)$，在两轴上均为0，但沿 $y=x$ 为 $1/2$。正确证明通常要找对所有方向都有效的估计。例如

$$\left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right| \le |y| \le |z| \to 0.$$

有时换极坐标看 $r \to 0$ 后是否仍残留角度依赖，也很有效。

2.2 · 教材27—29页

04 连续：函数值与极限接得上

在 a 连续要求 $f(a)$ 已定义，并且 $\lim_{z\to a} f(z) = f(a)$。极限本身不要求 a 点有值，这两个问题要分开。

多项式全平面连续；有理函数在原分母非零处连续。若原式在某点没有定义，即使约分后能补成连续函数，也要明确说“补定义后连续”。例如 $(z^2-1)/(z-1)$ 在 $z=1$ 无定义，补上值2后才连续。

连续不能推出可导 $\bar{z}$、$|z|$ 在全平面连续，但它们的复可导性受到更强限制。你可以把连续看成“点没有断开”，把下一节的复可导看成“所有方向的线性变化必须由同一个复数表示”。

无穷远极限 $z \to \infty$ 要覆盖模趋无穷的所有方向。e^z 沿正实轴趋无穷、沿负实轴趋零，故在无穷远没有统一极限。不能只拿实变量结论 $xe^{-x} \to 0$ 就推出复变量 $ze^{-z} \to 0$。

第二章 / 2.3

导数和解析函数的概念

教材29—31页

2.3 · 教材29—31页

05 差商为什么比实函数要求强

复导数定义为

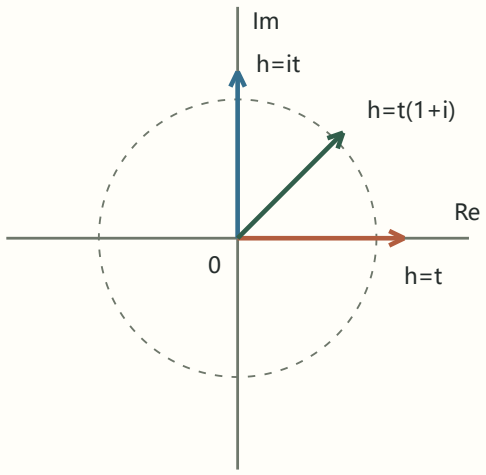
$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

h 是复数，既能沿实轴，也能沿虚轴或曲线趋零，所以差商必须沿所有方向趋同一个值。

可导的正例 $f(z)=z^2$，差商为 $2a+h \to 2a$，不依赖路径，故处处可导。**不可导的反例** $f(z)=\bar{z}$，差商为 $\bar{h}/h$，沿实轴等于1，沿虚轴等于 -1，处处不可导。

教材 $x+i\lambda y$ 的例子同理：沿实方向差商为1，沿虚方向差商为 λ。实常数 $\lambda \neq 1$ 时处处不可导；$\lambda = 1$ 时恰好变回 z。

图 2-2 不同方向的差商必须趋于同一个数



实轴差商 = t → 0

虚轴差商 = it → 0

任意路径：差商=h→0

统一控制所有方向，才证明导数存在；两个方向一致还不够。

图示 f(z)=z²，在0处；z²在全平面解析。

必须理解的意义 复可导时

$$f(a+h)-f(a)=f'(a)h+o(|h|).$$

前一章已经知道“乘同一个复数”代表统一的旋转和缩放。因此局部不同方向的变化必须协调，不能在水平方向伸一倍、竖直方向伸三倍还称作复可导。$f'(a)=0$ 时一阶变换退化，不能据此谈保持角度。

2.3 · 教材29—31页

06 某一点可导，与某一点解析隔着一个邻域

在 a 可导只问 a 一个点的差商。**在 a 解析** 要求存在整个小圆盘，里面每一点都可导。在区域 D 内解析，要求 D 中处处可导。全平面解析也叫整函数。

典型反例是 $f(z)=|z|^2$。在0的差商为 $|h|^2/h=\bar{h}\to 0$，所以 $f'(0)=0$；但在非零点不满足下一节的柯西—黎曼条件。因此它只有一个可导点，处处不解析，包括0也不解析。

题目问法决定答案 “求可导点”允许得到孤立点或一条曲线；“求解析域”必须得到开集，不能把一条线或两个点称作解析区域。

2.3 · 教材29—31页

07 导数运算法则与定义域一起写

确认可导后，和差、积、商、复合的求导法则与实变量相同。商法则仍需分母不为零；反函数法则需所选局部反函数有意义且原函数导数不为零。

例如

$$\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)'=\frac{ad-bc}{(cz+d)^2}.$$

教材假设 $ad-bc\neq 0$。若 $c\neq 0$，有限平面需排除 $z=-d/c$；若 $c=0$，则 $d\neq 0$，它是一次函数，全平面解析。这种边界情况不能照抄 $-d/c$。

第一轮不必反复证的部分 常数、幂、多项式的求导可由差商和二项式公式证明一次。之后用运算法则，并主动标出例外点。真正的新难点是含 $\bar z$、$|z|$ 或直接以 x,y 给出的函数，应转向下一节。

第二章 / 2.4

柯西—黎曼方程

教材32—35页

2.4 · 教材32—35页

08 从两个方向推导方程，不靠硬背符号

设 $f=u+iv$ 在 $a=x+iy$ 可导。沿实方向令 $h=\Delta x$，得

$$f'(a)=u_x+iv_x.$$

沿虚方向令 $h=i\Delta y$，得

$$f'(a)=\frac{u_y+iv_y}{i}=v_y-iu_y.$$

实部、虚部分别比较，于是

$$\boxed{u_x=v_y,\qquad u_y=-v_x.}$$

这就是柯西—黎曼方程，简称 C-R 方程。第一行同号，第二行带负号；实在忘了，就重走两个方向。

必要性与充分性要分开 复可导必然满足上述方程。但仅有两个偏导等式，未必保证复可导。精确的充分条件是：u,v 在该点作为实二元函数全微分存在，并满足 C-R 方程。课堂题最常用的方便条件是：四个一阶偏导在该点附近存在且在该点连续，再检查方程。

若 u, v 为多项式、指数三角组合且无分母异常，这个连续性条件通常自动满足。写解答时用一句话说明即可，不必制造冗长证明。

2.4 · 教材32—35页

09 为什么加上全微分就足够

全微分给出

$$\Delta u = u_x \Delta x + u_y \Delta y + o(\rho), \quad \Delta v = v_x \Delta x + v_y \Delta y + o(\rho),$$

其中 $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = |h|$。代入 C-R 方程，把两式合并成

$$\Delta f = (u_x + i v_x)(\Delta x + i \Delta y) + o(\rho).$$

除以 h，余项的模趋零，就得到 $f'(a) = u_x + i v_x$。你需要看懂的关键是“两个实线性式合成了乘一个复数”，不是记忆四行余项记号。

一个防止误用的例子 定义 $f(0) = 0$，非零处

$$f(x + iy) = \frac{x^3}{x^2 + y^2} + i \frac{y^3}{x^2 + y^2}.$$

原点处 $u_x = v_y = 1$、$u_y = v_x = 0$，C-R 成立。但沿实轴差商为1，沿 $h = t(1 + i)$ 差商为 $1/2$，故不可导。原因正是不能只用“偏导存在并满足方程”替代全微分条件。这是概念校验题，不要求第一轮背函数的构造。

2.4 · 教材32—35页

10 标准计算题的四步：拆、求、解、分清

以 $f(z) = x^3 - y^3 + 2ix^2y^2$ 为例，这是教材的主要示范。

1. 拆出 $u = x^3 - y^3, v = 2x^2y^2$，两者一阶偏导连续。
2. 求导：$u_x = 3x^2, u_y = -3y^2, v_x = 4xy^2, v_y = 4x^2y$。
3. 解 C-R：$x^2(3 - 4y) = 0$、$y^2(3 - 4x) = 0$，得 $(0, 0)$ 和 $(3/4, 3/4)$。
4. 在这两个点可导，导数用 $u_x + i v_x$，分别为0与 $27(1 + i)/16$。可导点集合没有任何开圆盘，所以处处不解析。

不要省略最后一句 只写“满足 C-R 的点是……”没有完整回答解析性问题。若方程在一个开区域处处成立，且偏导连续，才可说该区域内解析。

2.4 · 教材32—35页

11 恒为常数的证明与极坐标形式

若解析函数 f 的实部为常数，则 $u_x = u_y = 0$，由 C-R 得 $v_x = v_y = 0$；在连通区域上 v 为同一个常数，故 f 为常数。虚部恒定同理。

若 $|f|$ 恒定，先处理恒等于0的情况；非零时由 $u^2 + v^2 = c^2$ 求偏导，结合 C-R 得一个行列式为 $u^2 + v^2 > 0$ 的齐次方程组，推出 $u_x = u_y = 0$，所以仍为常数。若 f 与 $\bar{f}$ 都解析，把它们的 C-R 方程并列也会得到所有一阶偏导为零。**这里“区域连通”保证各点的常数一致**，不能不加解释地在分离集合上套用。

当 $z = re^{i\theta}$、$r > 0$ 时，C-R 可写

$$u_r = \frac{1}{r} v_\theta, \qquad v_r = -\frac{1}{r} u_\theta.$$

这是链式法则换坐标的结果。适合对数、幂和由极坐标给出的题；原点不能直接代入含 $1/r$ 的式子。第一轮优先熟练直角坐标，极坐标公式知道用途并能查用即可。

第二章 / 2.5

初等函数

教材35—44页

2.5 · 教材35—44页

12 指数：实部控制长度，虚部控制角度

定义

$$e^z = e^x(\cos y + i \sin y).$$

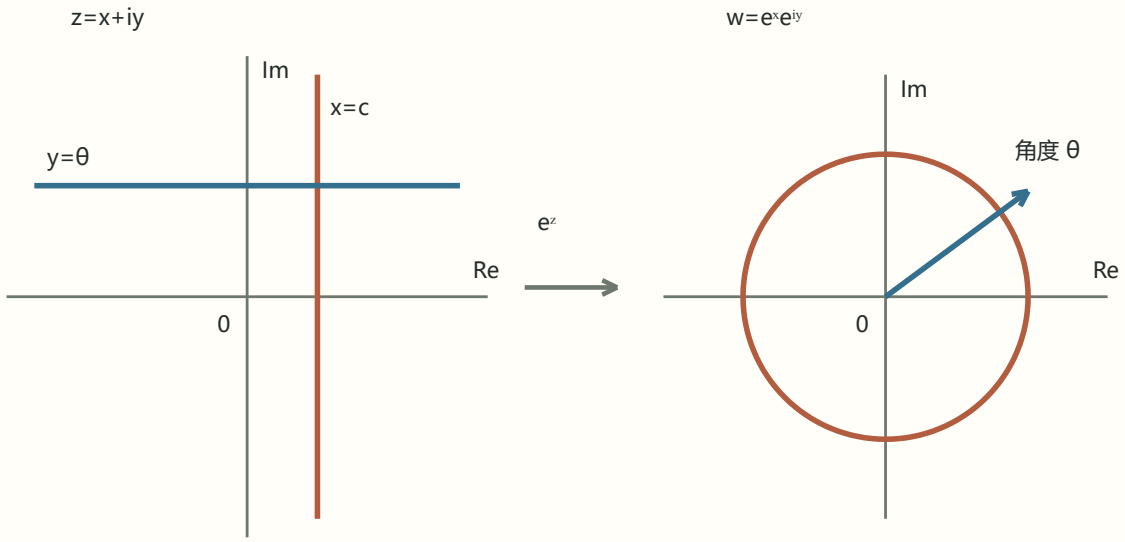
所以 $|e^z| = e^x$，一个辐角是 y。指数全平面解析，导数仍为自身，处处不为零，并满足 $e^{z+w} = e^z e^w$。

复指数的新性质是虚周期:

$$e^{z+2k\pi i} = e^z, \qquad e^{z_1} = e^{z_2} \iff z_1 - z_2 = 2k\pi i.$$

因此求 $e^z = A \neq 0$，先比较模 $e^x = |A|$ 得 $x = \ln|A|$，再比较角 $y = \arg A + 2k\pi$。

图 2-3 指数映射把水平坐标变成半径、竖直坐标变成角度



竖直线 → 圆；水平线 → 射线；y增加2πi映回同一点。

e^z从不为零，周期为2πi；在无限高竖条上会重复覆盖。

例题 $e^z = -2i$ 的全部解是 $z = \ln 2 + i(-\pi/2 + 2k\pi)$。如果 $A = 0$ 则无解。不要写成一个主值后就停下。

2.5 · 教材35—44页

13 三角与双曲函数：从指数定义统一处理

复变量没有实三角形，故采用指数定义：

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2};$$

$$\sinh z = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2}, \quad \cosh z = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2}.$$

教材的 $\mathrm{sh}, \mathrm{ch}, \mathrm{th}$ 分别就是 $\sinh, \cosh, \tanh$。四个函数均为整函数，导数分别是 $\cos z, -\sin z, \cosh z, \sinh z$。

指数定义立刻给出 $\sin(iy) = i\sinh y$、$\cos(iy) = \cosh y$。所以复平面上 $|\sin z|$、$|\cos z|$ 都没有实变量中的上界1，例如 $\cos(iy) = \cosh y \to \infty$。

该熟练的恒等式 $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$，$\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$，以及加法公式照常成立。这些是代数恒等式，不是大小估计。$\sin^2 z + \cos^2 z = 1$ 不等于 $|\sin z|^2 + |\cos z|^2 = 1$。

2.5 · 教材35—44页

14 拆实虚部、求模与求零点

由加法公式可得

$$\sin(x+iy)=\sin x\cosh y+i\cos x\sinh y,$$

$$\cos(x+iy)=\cos x\cosh y-i\sin x\sinh y.$$

这两条优先掌握，会用于求值、找实数取值曲线和估计函数模。例如

$$|\cos(x+iy)|^2=\cos^2 x+\sinh^2 y.$$

故 $\cos z$ 取实数值等价于 $\sin x\sinh y=0$，即 $y=0$ 或 $x=k\pi$。是实轴与若干竖直线，不只是实轴。

零点怎么找 不猜测有没有额外虚根，直接用指数：$\sin z=0\Leftrightarrow e^{2iz}=1$，所以 $z=k\pi$。其他三个为

$$\cos z=0:\ z=\pi/2+k\pi;\quad \sinh z=0:\ z=k\pi i;$$

$$\cosh z=0:\ z=(\pi/2+k\pi)i.$$

因此 $\tan z$ 在余弦零点以外解析，$\cot z$ 在正弦零点以外解析；$\tanh,\coth$ 同样排除各自分母零点。找解析域时，“名字像初等函数”不能替代查分母。

2.5 · 教材35—44页

15 对数全部值：把指数方程反过来解

求 $e^w=z\neq 0$，令 $w=u+iv$，比较模、角得到

$$\operatorname{Ln}z=\ln|z|+i(\arg z+2k\pi),\qquad k\in\mathbb{Z}.$$

沿用教材：大写 Ln 表示全部值，小写 $\ln z$ 表示取 $-\pi<\arg z\le\pi$ 的主值。某些其他教材大小写约定相反，做题前以题目约定为准。为避免与实对数混淆，本讲义谈解析分支时也用 $L(z)$。

例题 $\operatorname{Ln}(-1)=(2k+1)\pi i$，主值为 πi；

$$\operatorname{Ln}(1+i)=\tfrac12\ln 2+i(\pi/4+2k\pi).$$

零没有复对数，因为指数没有零点。即使正实数也有无穷多个复对数，例如 $\operatorname{Ln}2=\ln 2+2k\pi i$。

主值不能无条件套实对数法则 $\ln((-1)(-1))=\ln 1=0$，而 $\ln(-1)+\ln(-1)=2\pi i$。多值对数的乘法公式要按全部可能值的集合来理解；固定主值则可能差 $2k\pi i$。

2.5 · 教材35—44页

16 对数分支：割开一条射线的目的

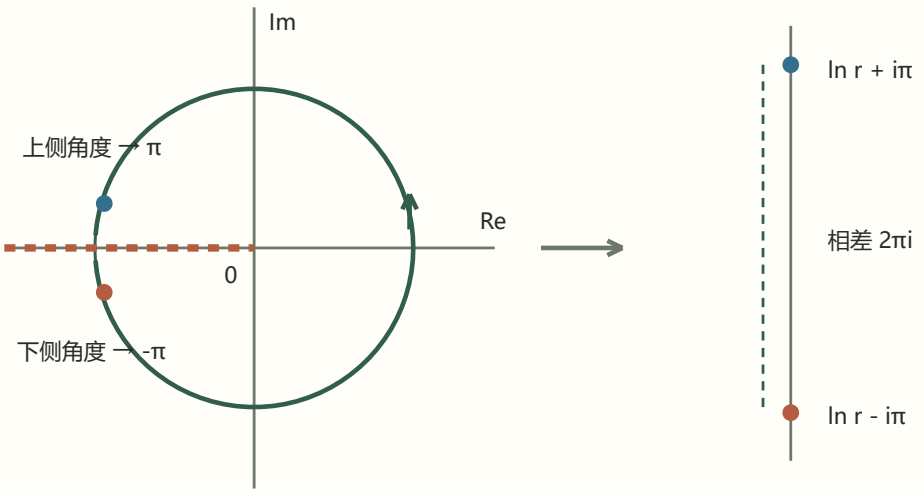
当 z 绕原点一圈，连续跟踪的角度增加 2π，对数增加 $2\pi i$，不能回到原数。因此在整个去心平面上不能选一个处处连续、单值的对数。

把非正实轴删掉，规定 $-\pi<\theta<\pi$，就得到开域

$$D=\mathbb{C}\setminus(-\infty,0],\qquad L(z)=\ln|z|+i\theta.$$

L 在 D 内解析，且 $L'(z)=1/z$。其他分支 $L(z)+2k\pi i$ 导数相同。也可沿正实轴割开，选 $0<\theta<2\pi$；分支不唯一，必须写范围。

图 2-4 绕原点一圈，对数增加2πi



主值割线处发生跳跃；连续分支必须把割线从开域中删去。

本书主辐角区间 (-π,π]；解析主分支使用开区间 (-π,π)。

主值存在与主值解析是两回事 按本书约定，负实数可以赋主值角 π，所以 $\ln(-1)=\pi i$ 有定义；但从负实轴上下两侧逼近，角度极限为 π 与 $-\pi$，主值函数在那里不连续，自然不解析。说“主值函数在负实轴割开的平面解析”时，解析域是严格不含那条轴的开域。

2.5 · 教材35—44页

17 一般幂：先声明用哪个对数

对 $z\neq 0$，定义全部值

$$z^{\alpha}=\exp\{\alpha\,\mathrm{Ln}\,z\}.$$

展开成 $\exp\{\alpha[\ln|z|+i(\arg z+2k\pi)]\}$ 后，才判断重复多少次。非零底数时：整数指数单值；既约有理数指数 p/q 有 q 个值；无理实数指数有无穷多个值；虚部非零的复指数也有无穷多个值。

例题 i^{i} 代入 $\mathrm{Ln}\,i=i(\pi/2+2k\pi)$，得

$$i^{i}=e^{-(\pi/2+2k\pi)}.$$

全部值居然都是正实数。若问主值，才取 $k=0$ 得 $e^{-\pi/2}$。

例题 $(-1)^{1/2}$ 得 $e^{i(\pi/2+k\pi)}=\pm i$。它和第一章方根公式一致。但 $\sqrt{z^2}$ 不可未经分支说明直接写成 z，例如使用主平方根时 $z=-1$ 就出问题。

2.5 · 教材35—44页

18 固定分支后的求导与指数记号的区别

在某个有解析对数 L 的区域内，定义 $p(z)=e^{\alpha L(z)}$，则

$$p'(z)=\alpha e^{\alpha L(z)}/z.$$

也常写成 $\alpha z^{\alpha-1}$，但两边必须采用相容的同一对数分支。

本课程把 e^{z} 固定解释为单值指数函数。一般幂 $a^{z}=\exp(z\,\mathrm{Ln}\,a)$ 若不选底数的对数，则可能多值。特别是教材指出：把 e^{1+i} 当指数函数值，只得一个数；把它当“底数 e 的一般幂、所有复对数都参与”会得到多个值。这是记号约定的提醒，做题时按上下文选定定义，不要把这两种约定混用。

2.5 · 教材35—44页

19 反三角函数：应会推一种，不必硬背一长表

为解 $\sin w=z$，令 $t=e^{iw}\neq 0$，就把三角方程变成二次方程：

$$t^{2}-2izt-1=0,\qquad t=iz\pm\sqrt{1-z^{2}}.$$

再解指数方程，得全部反正弦值

$$w=-i\,\mathrm{Ln}\big(iz\pm\sqrt{1-z^{2}}\big).$$

根号的两个值与对数的无穷多值共同产生全部答案。若根号本身已按全部值理解，就无需再重复写一个独立的正负号。

实际例题 求 $\sin w=2$。$t=2i\pm i\sqrt{3}=i(2\pm\sqrt{3})$。两者互为倒数，取全部对数得到

$$w=\frac{\pi}{2}+2k\pi\pm i\ln(2+\sqrt{3}),\qquad k\in\mathbb{Z}.$$

实数范围没有解，复数范围有无穷多解。

其他反函数可同样推导：$\operatorname{Arccos}z=-i\operatorname{Ln}(z\pm\sqrt{z^2-1})$；$\operatorname{Arctan}z=(2i)^{-1}\operatorname{Ln}[(1+iz)/(1-iz)]$（$z\neq\pm i$）。双曲反函数也转化为对数和根号。**第一轮要求掌握代换路线与多值来源**；除非作业专门考，不必背下每个反双曲函数公式。这里讲它，是为了防止把复反三角函数误当成实函数主值的一次代入。

第二章 / 2.6

习题路线与检查题

原书习题45—47页

2.6 · 原书习题45—47页

20 原书习题怎样分配精力

训练目标	原书题号	必须具备的方法
像集与极限	1—4、11—12	写 u,v、保留范围、找反例路径
可导点与解析域	5—7、10、14	连续性检查、C-R 方程、排除分母零点
解析函数为常数	8	C-R、区域连通
极坐标 C-R	9	链式法则、$r>0$
指数与三角方程	13、16	指数化、模角比较、拆实虚部
恒等式、对数、一般幂	15、17—18	指数定义、全部辐角、分支

第一轮优先5—7、10、13—14与17的对数幂部分；这几类和后续积分最直接相连。原书第8题理论证明和第9题坐标转换建议第二轮补齐。反函数的大量特殊值计算可在掌握 $t=e^{iw}$ 的方法后按需练习，不必把一整页公式都当成开课门槛。

2.6 · 原书习题45—47页 · 自编检查题

练习1 可导点不是解析域

求 $f(z)=|z|^2$ 的可导点、对应导数及解析域。

展开解析：解 C-R 后还要检查开邻域

$u=x^2+y^2, v=0$，偏导连续。C-R 给 $2x=0, 2y=0$，所以只在0可导，导数为0。可导点集合只有一个点，没有任何开邻域，故没有解析域，0也不是解析点。也可直接用差商 $|h|^2/h=\bar{h}\to 0$ 核验导数。

2.6 · 原书习题45—47页 · 自编检查题

练习2 不存在极限，两条路径就够

证明 $f(z)=\bar{z}/z$ 在 $z\to 0$ 时没有极限。若分子改成 $\bar{z}^2$，极限怎样?

展开解析：反例与统一估计各用一次

原式沿实轴为1、沿虚轴为 -1，故极限不存在。改后 $|\bar{z}^2/z|=|z|\to 0$，统一控制所有方向，故极限为0。不能因为第一个例子沿两条路径失败，就把所有含共轭的极限都判作不存在。

2.6 · 原书习题45—47页 · 自编检查题

练习3 从实虚部认出解析函数

设 $f=e^x(x\cos y-y\sin y)+ie^x(y\cos y+x\sin y)$，求解析域和导数。

展开解析：先尝试还原熟悉的复表达式

把两项合并，得到 $f=(x+iy)e^x(\cos y+i\sin y)=ze^z$，故全平面解析，$f'=(1+z)e^z$。若题目指定必须用 C-R，可对 u,v 分别求四个偏导，检查两式后用 u_x+iv_x；结果相同。认出表达式能减少计算，但不能忽略题目指定方法。

2.6 · 原书习题45—47页 · 自编检查题

练习4 解析域与指数零点

求 $f(z)=1/(1+e^z)$ 的解析域和导数。

展开解析：先解分母为零

$e^z=-1$ 的全部解为 $z=(2k+1)\pi i$。故函数在删去这些点的平面内解析，$f'=-e^z/(1+e^z)^2$。排除的是无穷多个离散点，不只是 πi。这个结果也会成为第四章泰勒展开收敛半径的依据。

2.6 · 原书习题45—47页 · 自编检查题

练习5 对数的主值与全部值

求 $\mathrm{Ln}(-2-2i)$ 和其主值；主值对数在 -1 是否解析?

展开解析：先把角放入本书主值区间

模为 $2\sqrt{2}$，主辐角为 $-3\pi/4$。全部值为 $\ln(2\sqrt{2})+i(-3\pi/4+2k\pi)$，主值取 $k=0$。本书的主值对数在 -1 有值 πi，但上下两侧极限不同，所以不连续、不解析。赋了一个值并不消除分支割线。

2.6 · 原书习题45—47页 · 自编检查题

练习6 复数的复数次幂

求 2^{i} 的全部值与主值。

展开解析：别漏掉正实底数的复对数

$\mathrm{Ln}\,2=\ln 2+2k\pi i$，故 $2^{i}=e^{-2k\pi}e^{i\ln 2}$。主值为 $\cos(\ln 2)+i\sin(\ln 2)$。全部值沿一条固定射线排列，模为 $e^{-2k\pi}$。若题目事先定义 $2^{z}=e^{z\ln 2}$，就已选定实对数，此时应按那个单值定义回答。

2.6 · 原书习题45—47页 · 自编检查题

练习7 解一个复三角方程

求 $\cos z=2$ 的全部解。

展开解析：令指数作未知数

设 $t=e^{iz}$，则 $t+t^{-1}=4$，即 $t^{2}-4t+1=0$，得 $t=2\pm\sqrt{3}>0$。取全部对数 $iz=\ln(2\pm\sqrt{3})+2k\pi i$，得到 $z=2k\pi\pm i\ln(2+\sqrt{3})$。两种符号已覆盖全部解；实部的周期项不能漏掉。

2.6 · 原书习题45—47页 · 自编检查题

练习8 C-R 的常数结论

设 f 在区域 D 内解析，且 $\mathrm{Im}\,f\equiv 3$。证明 f 是常数，并说明为什么要说“区域”。

展开解析：虚部不变会锁住实部

$v_x = v_y = 0$，由 C-R 得 $u_x = u_y = 0$。沿 D 中任意连接两点的折线积分可知 u 取同一常数，因此 $f = c + 3i$。连通性使各个点属于同一个常数块；如果集合是两个互不相连的圆盘，可以在一个圆盘取 $1 + 3i$，另一个取 $2 + 3i$，局部均解析，却不是全体同一个常数。

2.6 · 原书习题45—47页

21 进入第三章之前的自查

看见 x, y 给出的函数，会写 C-R 并检查充分条件；看见有理式，会列全分母零点；看见 e^z 方程，会加 $2k\pi i$；看见对数和非整数幂，会说明主值或分支；看见“解析”二字，会主动检查有没有开邻域。

八道检查题至少前七题应能独立完成。较长的反双曲公式和偏导反例构造可以查阅，但“C-R 不是只剩两条等式”“解析性是邻域性质”必须理解。这两点会决定第三章的积分定理能不能用。

来源、编排与掌握要求

依据用户提供的严镇军《数学物理方法》扫描本第二章整理；正文印刷页24—44，章末习题45—47。扫描PDF文件页序等于印刷页码加6。按原书节序覆盖各主题，以重新讲解、推导主线和例题说明组织，未逐字复制原文。自编检查题与原书习题分开编号，原书题号可在本章习题路线中查找；本文件不声称是全部原书习题的逐题答案册。

第一轮优先掌握能独立做题所需的概念、步骤和适用条件；背景、证明及拓展均说明用途和暂缓深究的边界。第二章含8道自编检查题及完整解析。公式与SVG内嵌，可离线阅读；屏幕答案默认折叠，打印时自动展开。整理日期：2026年10月15日。