数学物理方法 / 复变函数

第六章学习讲义

保形变换

局部导数 → 分式线性 → 区域构造 → 幂与对数 → 裂缝与复势。按教材顺序展开概念、例题、证明主线与解题条件；每章附原书习题路线和自编检查题。

严镇军教材配套讲读　教材142—168页　20道自编检查题　离线SVG公式与图解

这一章先抓住一句话：**用解析函数把难处理的区域变成半平面、圆或条带，再在简单区域里解决问题**。题目通常不是问“这个函数有什么漂亮性质”，而是让你求一个变换、判断像域、核对一一性，或把边界电势搬到简单区域。

本讲义对应教材印刷页142—168，扫描PDF第148—174页。按6.1、6.2、6.3、6.4的原顺序展开；为方便学习，把内容拆成九节。原书的全部主题、主要证明思路和例题路线均有对应讲解；带星号的内容也保留，并说明先学到哪里。这里采用重新组织的讲解，不逐字转录原文。

学成什么样才算过关？ 能独立写出“原域 → 中间域 → 目标域”的路线；每一步说明边界的像、域落在哪一侧、是否一一对应、根式或对数采用哪个分支。最后把给定点和导数方向代回去检验。只记一个结果公式，还不能算会做这一章的题。

建议分三轮：先学6.1—6.4，做最基本的导数和分式线性题；再学6.5—6.6，练复合变换和分支；最后完成6.7—6.9的星号内容与综合题。文末20道自编检查题全部附解析，原书习题1—11另列路线，不混用题号。

学习顺序：先跟着例题写关键步骤，再独立完成检查题，最后按习题路线回到原书。证明段落均说明用途，不要求第一轮逐行背诵。

本章目录

6.1 导数与保形的概念	教材142—146页
6.2 分式线性变换的基本工具	教材146—150页
6.3 圆盘半平面与圆环的构造	教材150—154页
6.4 幂函数根式与角域	教材154—157页
6.5 指数对数与条带	教材158—160页上部
6.6 儒可夫斯基变换与割线域	教材160—164页
6.7 用保形变换求平面场的复势	教材164—166页
6.8 原书习题路线与全章速查	教材166—168页
6.9 二十道自编检查题与完整解析	全章复习

第六章 / 6.1

导数与保形的概念

教材142—146页

6.1 · 教材142—146页

01 先把“映照”翻译成人话

输入一个复数点$z=x+iy$，函数给出另一个平面上的点$w=f(z)=u+iv$。当z沿着一条线移动，w也描出一条线；当z遍历区域D，所有输出点组成像域$f(D)$。这是“映照”一词在本章的意思。

比如$w=2z+i$把每个点先到原点距离放大两倍，再向上移动1。$w=z^2$把极坐标$re^{i\theta}$变成$r^2e^{2i\theta}$。后一个函数能把象限变成半平面，已经有了简化区域的用途。

做题需要的输出是区域，不只是边界曲线。 “实轴变成单位圆”只交了一半答案：还要判断上半平面到底变成圆内还是圆外，是否覆盖完整目标区域。

6.1 · 教材142—146页

02 导数为什么同时管旋转与伸缩

复导数存在时，在z_0附近有

$$f(z_0+\Delta z)-f(z_0)=f'(z_0)\Delta z+o(|\Delta z|).$$

设$f'(z_0)=\rho e^{i\alpha}\neq 0$。忽略相对越来越小的余项，局部变化就是“乘$\rho$，再转$\alpha$”。因此

$$\text{局部伸缩系数}=|f'(z_0)|,\qquad \text{局部旋转角}=\arg f'(z_0)\pmod{2\pi}.$$

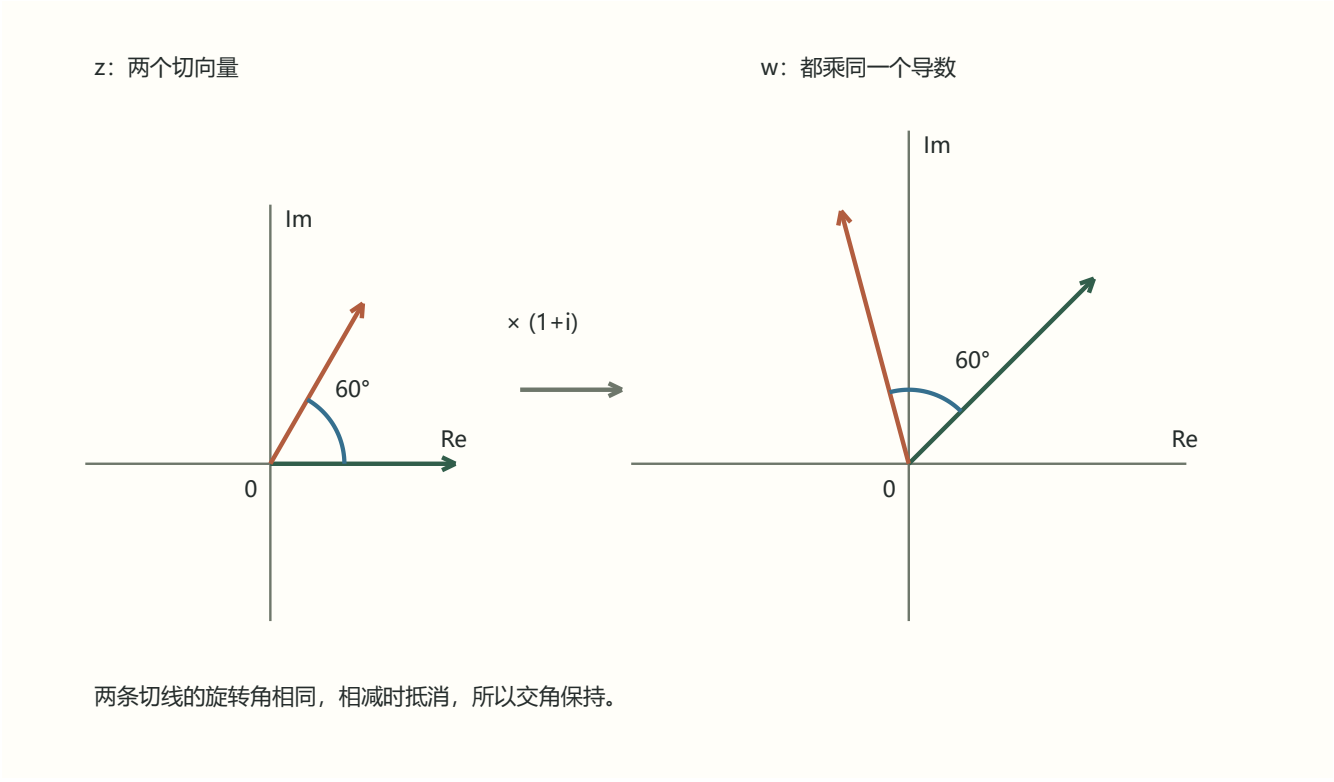
“局部”指趋近该点时的极限效果。它不表示整幅大图严格相似，也不表示一整条有限曲线长度都乘同一个常数。若导数随位置变化，缩放比例也随位置变化。

教材用曲线参数证明：若$z=z(t)$经过z_0且$z'(t_0)\neq 0$，则

$$w'(t_0)=f'(z_0)z'(t_0),\qquad \arg w'(t_0)=\arg f'(z_0)+\arg z'(t_0).$$

这不是额外的一套公式，而是“切向量乘复数”的链式法则。第一轮应能用它解释旋转角，不必背原文的曲线命名。

图 6-1 同一导数让切向量旋转同一角度、伸缩同一比例



图示 导数1+i：旋转45°，伸缩√2；两向量都转45°、长度乘√2；交角仍为60°。

6.1 · 教材142—146页

03 保角与保形：原书特意多加了什么条件

两条过z_0的光滑曲线，切向量分别为v_1, v_2。经过映射后都乘同一个$f'(z_0)$，所以

$$\arg \frac{f'(z_0)v_2}{f'(z_0)v_1} = \arg \frac{v_2}{v_1}.$$

有向夹角保持不变，各方向的局部伸缩系数也相同。解析且导数非零，就具有这里的局部保角性质。

本书用语要认准： 在域内处处保角，称为保角变换；再加上域内一一对应，才称为保形变换。不同教材可能把“保形”用于局部性质，做这本书的题应服从本书的定义。

例如e^z处处导数非零，但$e^{z+2\pi i} = e^z$，所以它在整个复平面上不是本书意义下的一一保形变换。限制到高度不超过2π的开水平条带，才消除了这类重叠。

共轭$w = \bar{z}$会把有向角的方向反过来，属于反向保角的例子；它在本章的解析保形变换范围之外。不要只看角度的绝对值就认定符合定义。

6.1 · 教材142—146页

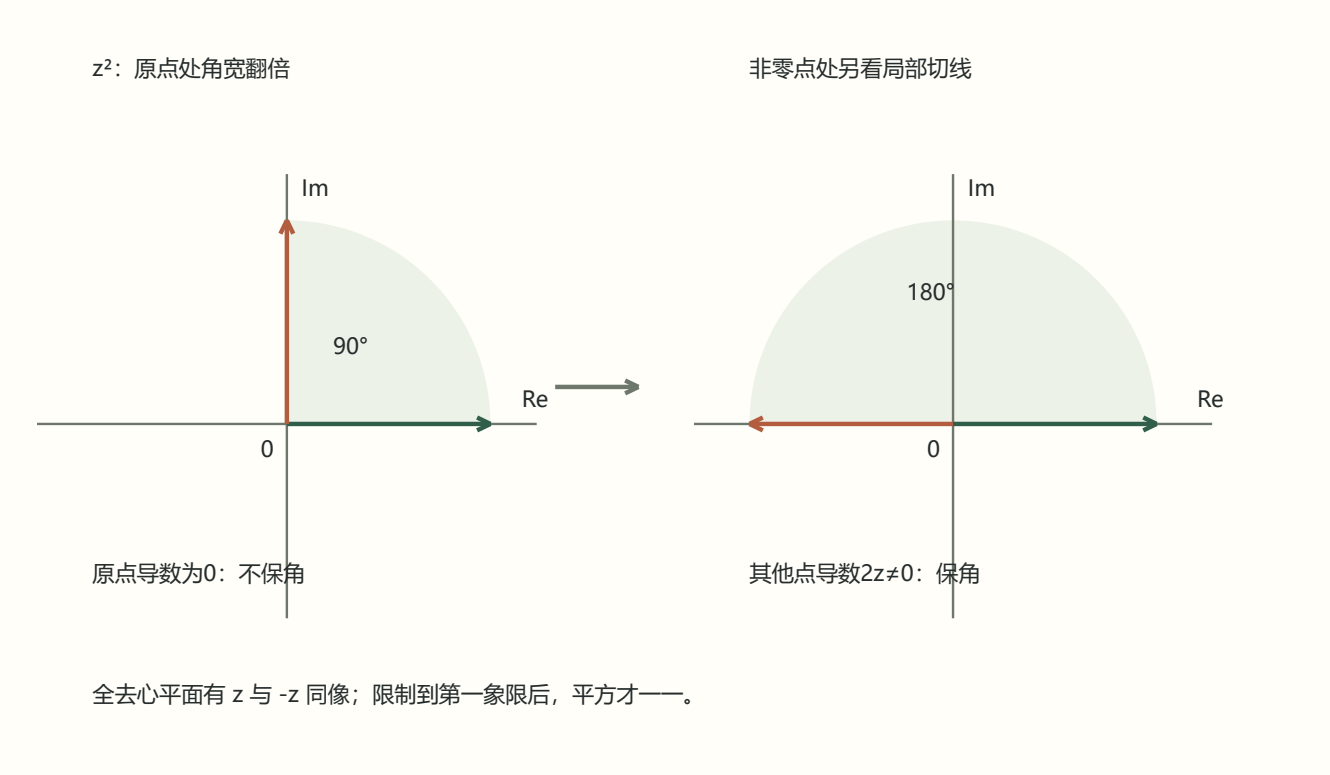
04 导数为零的点：为什么必须单独处理

若$f(z)-f(z_0)=a_m(z-z_0)^m+\cdots$，$m\geq 2$，主导项把从该点出发的角度乘以$m$，所以一般不保角。最直接的例子是$z^2$在原点把第一象限的直角变成平角。

但在$z_0\neq 0$处，$(z^2)'=2z_0\neq 0$，过该点两条曲线的夹角保持。**“把关于原点的辐角乘2”和“保持非零点处曲线的交角”完全可以同时成立。** 前者量的是从固定原点看射线，后者量的是曲线在交点的切线。

一一性还要另外证明。例如z^2在$\mathbb{C}\setminus\{0\}$导数不为零，但1和-1同像。限制到第一象限后，辐角范围变成$0<\arg w<\pi$，才能一一映为上半平面。

图 6-2 原点辐角翻倍，与非零点处保持交角并不矛盾



关于原点的辐角变化与非零点的局部保角是两种不同角度；整体一一性仍须另证。

6.1 · 教材142—146页

05 无穷远点怎么检查：用倒数坐标

教材花一页讨论无穷远，是为了让“直线也是圆”“极点也能保形”这些说法有准确含义。实用规则是：源点为∞时用$\zeta=1/z$；像点为∞时用$\eta=1/w$。在新坐标的零点检查解析性和非零导数。

对$w=az+b$，在无穷远两边换坐标：

$$\eta = \frac{1}{a/\zeta + b} = \frac{\zeta}{a + b\zeta}, \qquad \eta'(0) = \frac{1}{a} \neq 0.$$

对$w = 1/z$，在$z = 0$附近用像坐标$\eta = 1/w = z$；在$z = \infty$附近用源坐标$\zeta = 1/z$，则$w = \zeta$。两处都没有局部退化。

掌握边界： 要会换坐标、知道简单极点在球面意义下可以保形；第一轮不必逐行重演教材用两条无穷远曲线定义角度的长证明。普通平面里说$1/z$“在0解析”仍然是错的。

6.1 · 教材142—146页

06 长度和面积：为原书习题3、4补齐工具

弧长微元变为$ds_w = |f'(z)| ds_z$，于是

$$L(f(C)) = \int_a^b |f'(z(t))|\,|z'(t)|\,dt.$$

若参数像曲线重复覆盖，这个积分按走过的次数计长。面积方面，C-R方程给出雅可比

$$J = u_x v_y - u_y v_x = u_x^2 + v_x^2 = |f'(z)|^2.$$

一一保形时，像域的几何面积为

$$\mathrm{Area}(f(D)) = \iint_D |f'(z)|^2 \, dx\, dy.$$

这部分不是背景闲话：原书直接出题。要记住长度是一倍模、面积是模的平方；多对一时直接积分得到的是按覆盖重数累计的面积。

第六章 / 6.2

分式线性变换的基本工具

教材146—150页

6.2 · 教材146—150页

07 四个系数，为什么只有三个自由度

分式线性变换，也叫莫比乌斯变换，写成

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \qquad ad - bc \neq 0.$$

四个系数同时乘同一个非零数，函数不变，所以只有三个复参数的自由度。行列式条件保证变换不退化成常数。

若$c \neq 0$，极点是$-d/c$，且$T(\infty) = a/c$。若$c = 0$，就是整线性变换，$T(\infty) = \infty$。反解时把$w(cz + d) = az + b$收集成

$$z = \frac{dw - b}{a - cw}.$$

因此反变换也是同类函数。有限普通点处

$$T'(z) = \frac{ad - bc}{(cz + d)^2} \neq 0.$$

做题要达到： 看见分式后能立刻找零点、极点、无穷远的像，能反解，能检查是否退化。

6.2 · 教材146—150页

08 为什么它保形：把复杂式子拆成简单动作

$c \neq 0$时，将式子整理为

$$T(z) = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c^2} \frac{1}{z + d/c}.$$

从右往左读动作：先平移，再取倒数，再乘非零常数，最后平移。每个动作都是扩充复平面上的一一保形变换，所以复合仍然保形。这个拆法也解释了为什么它们的复合仍属于分式线性变换。

这里讲证明的用途是帮你构造变换，尤其是“先把某个边界点送到无穷远，把圆拉成直线”。第一轮需要会拆分、会用，不必背四个系数的所有中间代数。

6.2 · 教材146—150页

09 保圆性中的“圆”包含直线

圆与直线统一写成广义圆方程

$$A|z|^2 + Bz + \bar{B}\bar{z} + C = 0, \quad A, C \in \mathbb{R}.$$

非退化时$|B|^2 > AC$；$A = 0$对应直线，$A \neq 0$对应通常的圆。代入$z = 1/w$并乘$|w|^2$，得到

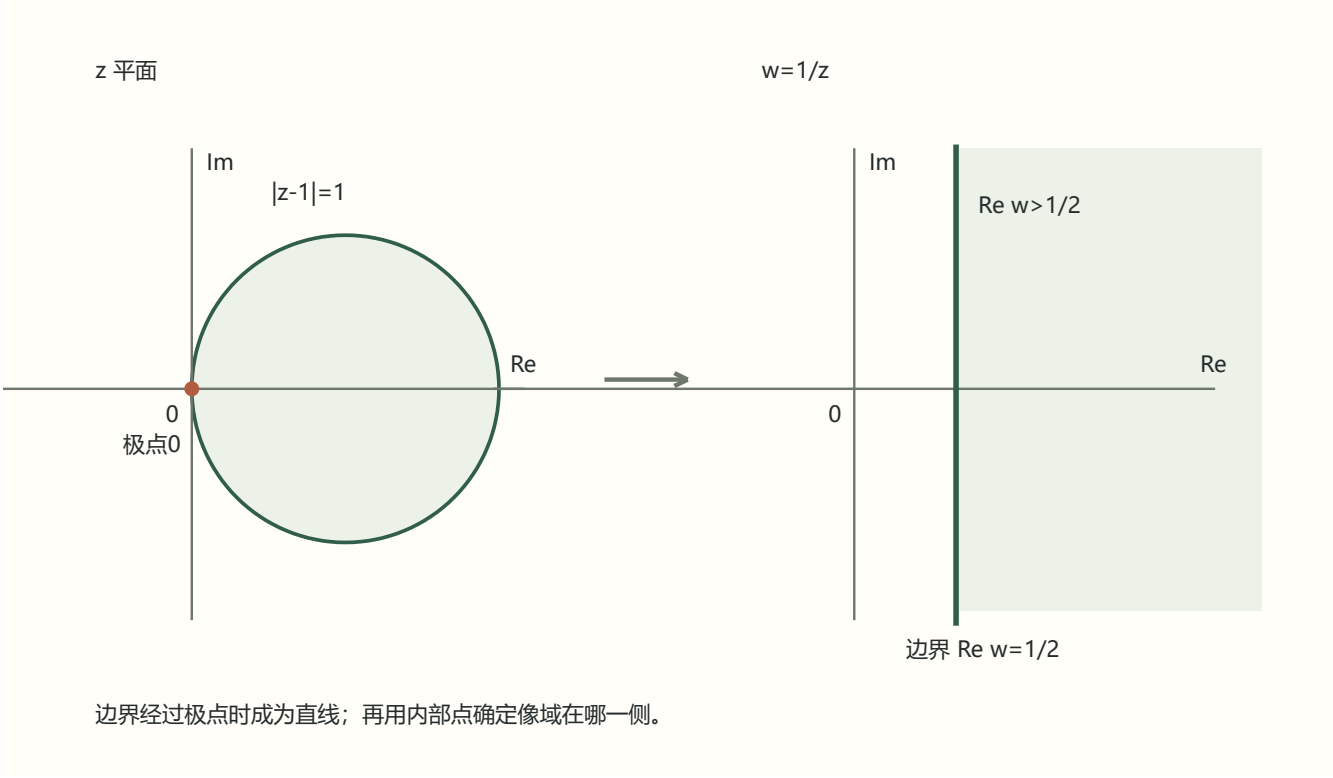
$$C|w|^2 + \bar{B}w + B\bar{w} + A = 0.$$

仍是同一种方程。平移、旋转、伸缩显然也保持广义圆，所以分式线性变换把广义圆变成广义圆。

最有用的判据：原边界含有变换的极点，像边界就通过无穷远，因此是一条直线。 否则像为通常的圆。保圆性只管边界的形状，暂时不管圆内、圆外。

实际求像边界有两种方法：选原边界三个点算像，以三个像点确定圆或直线；或者把反变换代回边界方程。前者快，后者方便精确写出圆心与半径。

图 6-3 倒数映射：过极点的圆变直线



图示 |z-1|=1 → Re w=1/2；原圆内对应 Re w>1/2；0在边界上，圆内的函数处处有定义。

6.2 · 教材146—150页

10 圆对称：一个公式解决“另一个点在哪里”

关于直线的对称就是镜面对称。关于圆$|z-z_c|=R$，对称点满足“同一条从圆心发出的射线、距离乘积为R^2”。写成公式是

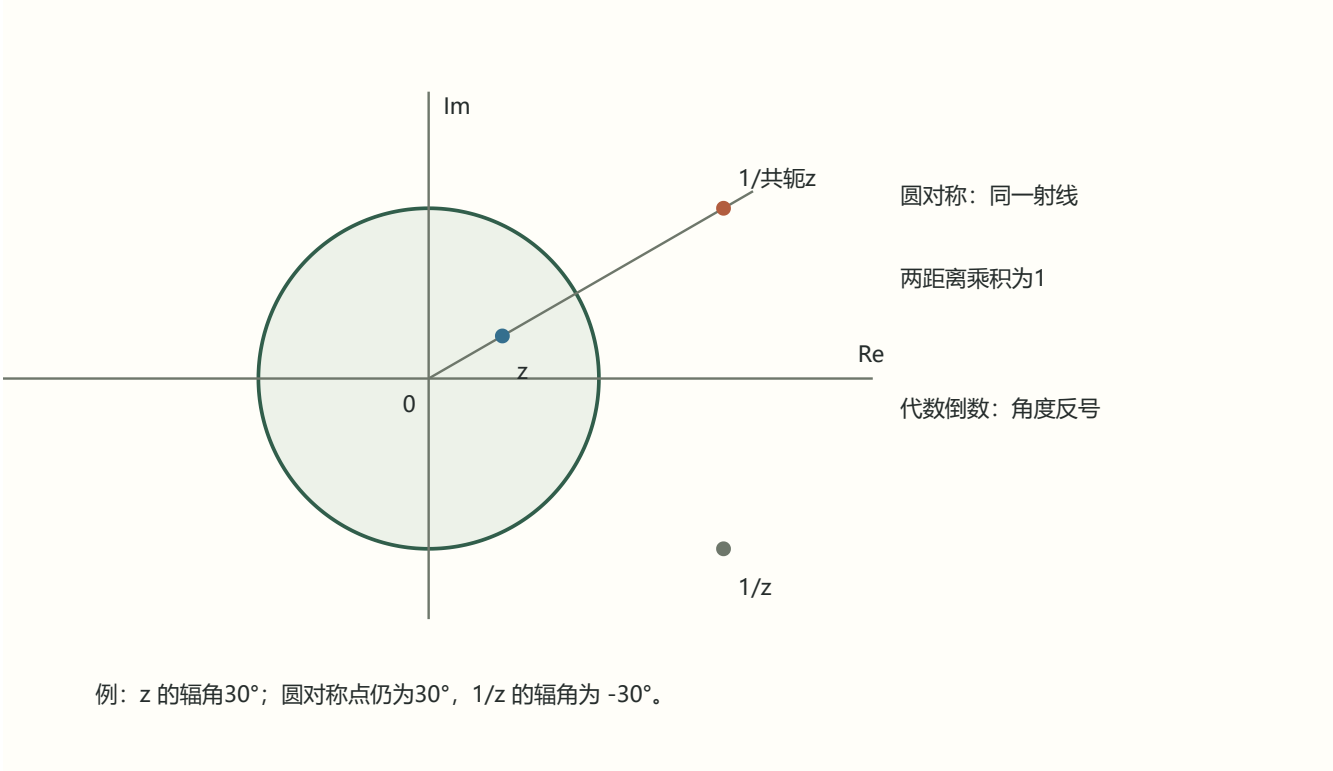
$$z^*=z_c+\frac{R^2}{\overline{z-z_c}}.$$

圆心与∞互为对称，圆周上的点与自己对称。单位圆的公式尤其常用：$z^*=1/\bar{z}$。**这里有共轭！** 它与儒可夫斯基变换里出现的代数倒数$1/z$不是同一概念。

教材先证明：过一对对称点的广义圆，与给定圆正交；再利用保圆、保角把正交性送到像平面，得到“对称点映成关于像圆的对称点”。这就是保对称性。

为什么需要讲这段几何证明？因为当你知道某点映成0，便能通过对称关系快速定位映成∞的点，构造圆盘自映射和同心圆环映射。第一轮会用公式和结论即可；切线幂定理那一步属于证明细节。

图 6-4 圆对称点 1/共轭z 与同像倒数点 1/z 的区别



例：z 的辐角30°；圆对称点仍为30°，1/z 的辐角为 -30°。

橙点用于分式线性保对称性；灰点用于儒可夫斯基同像条件，不能混淆。

6.2 · 教材146—150页

11 三点确定一个变换：按固定次序写交比

给定互不相同的z_1, z_2, z_3与互不相同的w_1, w_2, w_3，唯一的分式线性变换由

$$\frac{w-w_1}{w-w_2}\,\frac{w_3-w_2}{w_3-w_1} = \frac{z-z_1}{z-z_2}\,\frac{z_3-z_2}{z_3-z_1}$$

确定。别靠记忆随意交换其中一对：左右必须采用同一顺序。该式把第一点变为0、第二点变为∞、第三点变为1，左右于是是同一个标准化坐标。

含∞时应取极限。例如$z_3=\infty$时右边的最后一个比值趋于1；不是把每个出现∞的因子都当普通数删除。

若只规定$a\mapsto 0, b\mapsto\infty$，直接设

$$w = k\frac{z-a}{z-b}, \qquad k\neq 0,$$

再用第三点定k，通常比代四个系数省事。若要求$z_2\mapsto\infty, z_1\mapsto w_1, z_3\mapsto w_3$，则

$$w = w_1 + (w_3 - w_1)\frac{z - z_1}{z - z_2}\,\frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1}.$$

检验习惯：每次都把三个指定点代回去。 这比重新检查交比的代数可靠。

第六章 / 6.3

圆盘半平面与圆环的构造

教材150—154页

6.3 · 教材150—154页

12 边界算完以后，用一个内部点定侧

分式线性变换在扩充平面上一一对应，一条广义圆将球面分成两侧，映射把每一侧完整送到像圆的一侧。因此：先求边界，再选原域内部的一个点，看其像位于哪边。

也可以用有向边界：沿正向边界走时原域在左侧，像域仍在像边界的左侧。但图上容易看错，初学时内部测试点更稳妥。

教材例2的变换为

$$w = \frac{2z - i}{2iz - 1}.$$

当$z = x$实数时，分子分母的模都等于$\sqrt{4x^2 + 1}$，所以实轴变成单位圆。原域是下半平面，它包含极点$z = -i/2$，其像为∞，所以像域是单位圆外部。若只在普通平面书写，应说明极点处不取有限值；在扩充平面中外部包含∞。

对一般解析函数，**“边界加一个点”不自动证明满射与一一性**；这里能这样做，是因为分式线性变换已有全局一一性定理。后面的幂函数、指数函数要先限制定义域。

6.3 · 教材150—154页

13 上半平面到单位圆：从距离关系看公式

取$a = \alpha + i\beta$，$\beta > 0$，则

$$w = e^{i\phi}\frac{z - a}{z - \bar{a}}$$

把上半平面一一映到单位圆内，且$a \mapsto 0$。原因很直观：上半平面的点到a比到下方镜像点$\bar{a}$更近。代数上，

$$|z - \bar{a}|^2 - |z - a|^2 = 4\beta\ \mathrm{Im}\, z > 0.$$

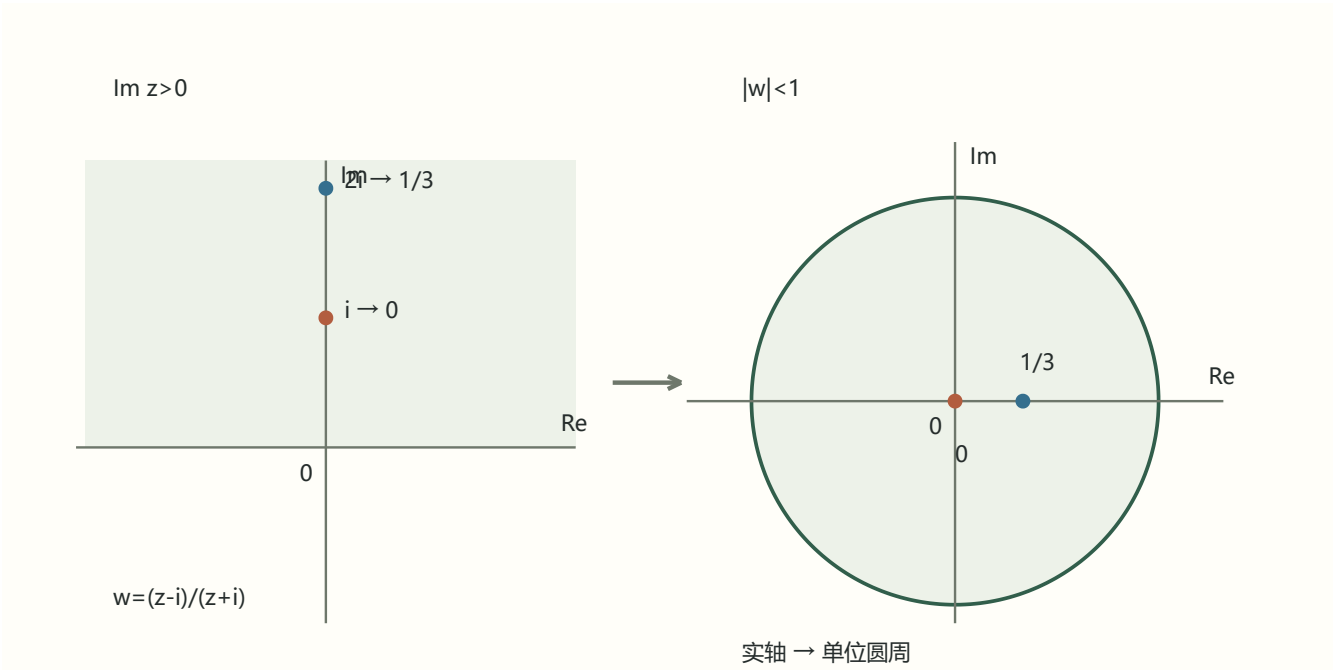
边界实轴两段距离相等，像在单位圆上。$e^{i\phi}$只转动目标圆盘，不改变模。若题目再给导数旋转角，就用它定ϕ。

特别常见的凯莱变换是

$$w=\frac{z-i}{z+i},\qquad z=i\frac{1+w}{1-w}.$$

在$z=i$处$w'(i)=-i/2$，局部旋转角为$-\pi/2$，伸缩系数为$1/2$。本章原书习题7正是这类归一化问题。

图 6-5 上半平面变圆盘：边界与内部测试点



源域内导数非零且一一，内部点i的像0确定圆内一侧。

6.3 · 教材150—154页

14 圆盘自映射：原书例3完整推导

要把$|z|<1$变到$|w|<1$，并把指定点a送到0。单位圆关于a的对称点为$1/\bar{a}$；0关于目标单位圆的对称点为∞。由保对称性，极点必须在$1/\bar{a}$。于是整理成

$$w=e^{i\phi}\frac{z-a}{1-\bar{a}z},\qquad |a|<1.$$

当$a=0$时公式直接变成旋转$w=e^{i\phi}z$，不用单独操作“无穷远极点”。圆周上$|z-a|=|1-\bar{a}z|$，所以前面的常数必须模为1。

不仅边界正确，内外也能直接核对：

$$1-\left|\frac{z-a}{1-\bar{a}z}\right|^2=\frac{(1-|a|^2)(1-|z|^2)}{|1-\bar{a}z|^2}>0.$$

在a处求导：

$$w'(a)=\frac{e^{i\phi}}{1-|a|^2}.$$

分母是正实数，因此指定的旋转角就是ϕ。原书要求角度π时，取$\phi=\pi$，得到$w=(z-a)/(\bar{a}z-1)$。不要误把$\bar{a}$写成a。

6.3 · 教材150—154页

15 偏心圆环变同心圆环：原书例4

两条圆为$|z-3|=9$与$|z-8|=16$。前者位于后者内部，原域取两圆之间。希望变成以0为中心、外半径1的圆环。

设原像p,q分别映成0与∞。因为0、∞关于任意同心圆对称，所以p,q必须同时关于原来的两个圆对称。圆心都在实轴上，可求实的p,q：

$$(p-3)(q-3)=81,\qquad (p-8)(q-8)=256.$$

设$S=p+q,P=pq$，两式化成$P-3S=72$、$P-8S=192$，得到$S=-24,P=0$，故p,q为$-24,0$。

先设$-24\mapsto 0,0\mapsto\infty$，则$w=k(z+24)/z$。0在小圆内，因此小圆的内部被送到无界一侧，小圆周对应目标外圆。用小圆上的$z=12$定模：

$$1=|k|\frac{36}{12}=3|k|.$$

可取

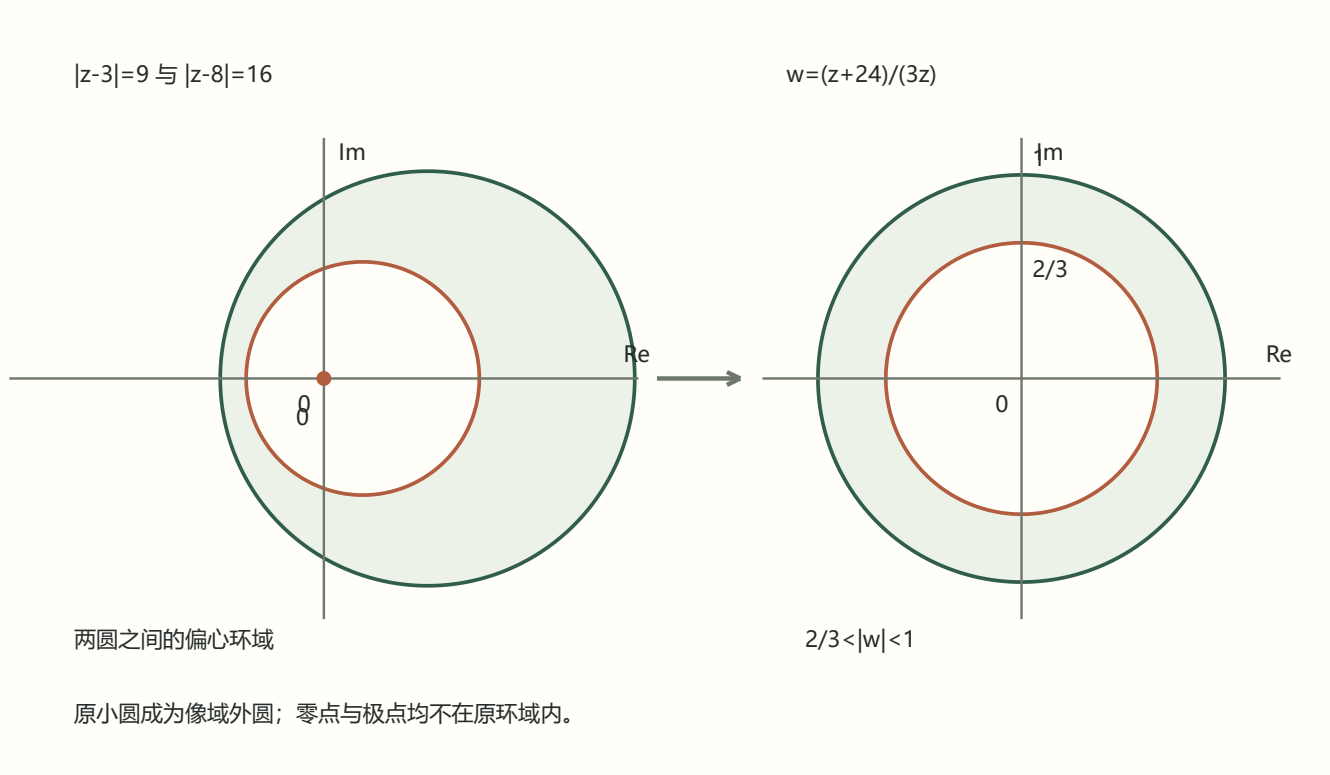
$$w=e^{i\phi}\frac{z+24}{3z}.$$

大圆上的$z=24$映成模$2/3$，所以像域为$2/3<|w|<1$。交换0、∞的原像，则得到另一族

$$w=e^{i\phi}\frac{2z}{z+24},$$

仍映成同一个半径比的圆环，但两条原边界的对应交换。这里不要求背数字；要会“共同对称点 → 零极点 → 定比例 → 判两条边界”。

图 6-6 偏心圆环变同心圆环



原小圆内部含极点0，因此它的内部映到无界侧，小圆周对应目标外圆。

第六章 / 6.4

幂函数根式与角域

教材154—157页

6.4 · 教材154—157页

16 幂映射：先记模角，再限制一一性

对$w = z^n$,

$$|w| = |z|^n, \qquad \arg w = n \arg z$$

中的辐角应沿选定区间连续取值。角域$\alpha < \arg z < \beta$若宽度不超过$2\pi/n$，且不含顶点0，幂映射在其中一一，导数也不为零。角宽变为$n(\beta - \alpha)$，圆弧半径变为r^n。

当$n(\beta - \alpha) = 2\pi$时，像是沿一条射线割开的平面。两条边界射线的像虽然落在同一条射线上，仍代表切口的两岸；不能把两岸粘回去，声称像是整个去心平面。

最常用的套路是

$$\alpha < \arg z < \beta \;\longrightarrow\; 0 < \arg\zeta < \beta-\alpha \;\longrightarrow\; \operatorname{Im} w > 0,$$

其中$\zeta = e^{-i\alpha}z$，再取$w = \zeta^{\pi/(\beta-\alpha)}$。非整数幂应通过该角域上的连续对数定义。

6.4 · 教材154—157页

17 根式的分支必须和切口一起交代

在负实轴割开的平面，取$-\pi < \theta < \pi$，则

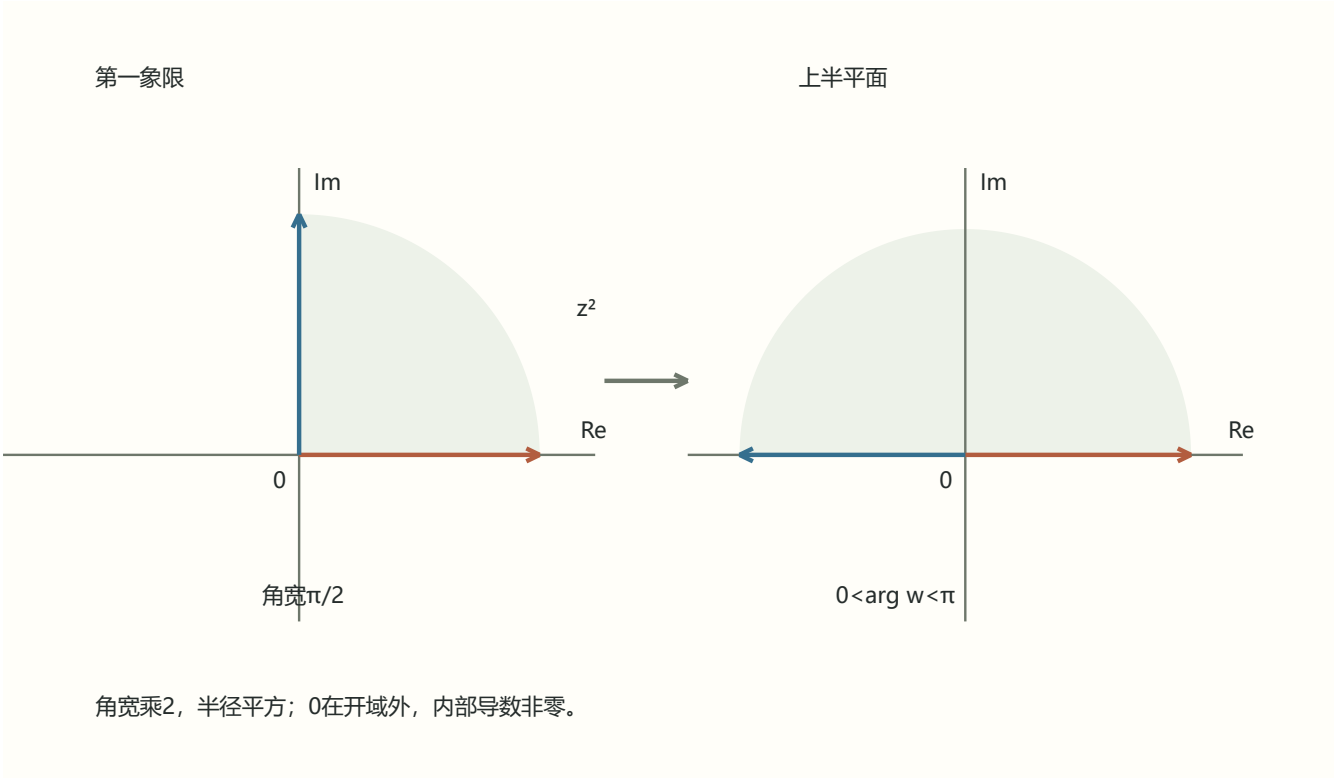
$$z^{1/n} = \exp\left(\frac{\ln|z| + i\theta}{n}\right)$$

映到$-\pi/n < \arg w < \pi/n$。在正实轴割开的平面，若改取$0 < \theta < 2\pi$，同样的形式映到$0 < \arg w < 2\pi/n$。

特别地，后一个平方根分支把正轴割平面映成上半平面；主平方根把负轴割平面映成右半平面。**“开平方以后就是上半平面”缺少分支条件。**

分支的另外$n-1$种选择会让目标角域整体旋转$2k\pi/n$。只给一个点的根值，常可把选择唯一固定下来；若该点在切口上，就必须说明取哪一岸的边界极限。

图 6-7 角宽决定幂指数，切口决定根式分支



图示 第一象限平方；第一象限宽π/2，平方在该域内一一并完整覆盖上半平面。

6.4 · 教材154—157页

18 上半单位圆到上半平面：原书例1

原域$D=\{|z|<1,\operatorname{Im}z>0\}$，边界由直径和上半圆弧构成，两端点为$-1,1$。先用

$$t=\frac{z+1}{z-1}$$

把$-1\mapsto 0,1\mapsto\infty$，使两条原边界都变成直线。直径内部的$z=0$映成$-1$，上圆弧上的$z=i$映成$-i$。测试内部点$z=i/2$，得到$t=-3/5-4i/5$，所以中间域是第三象限。

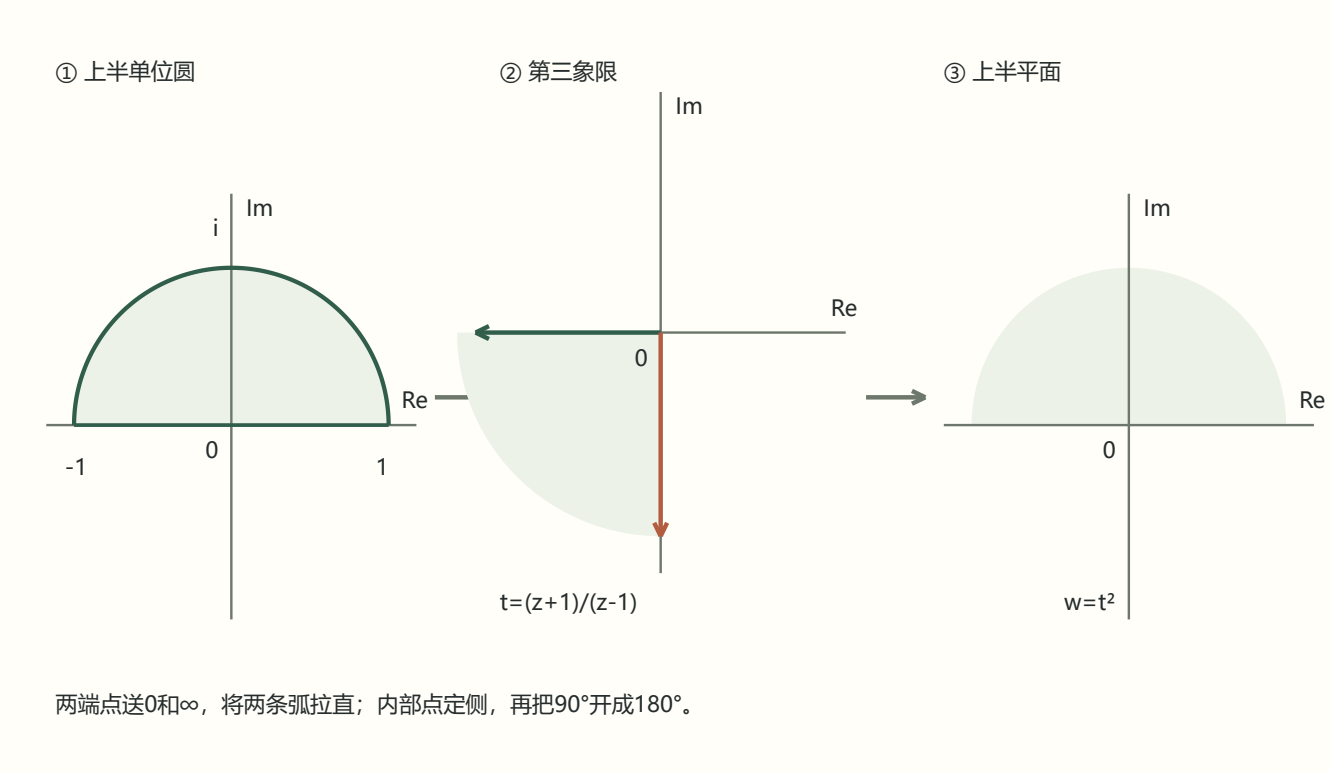
第三象限的辐角可选$\pi<\arg t<3\pi/2$。平方以后为$2\pi<\arg w<3\pi$，等价于上半平面，于是

$$w=\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2.$$

为什么一定一一？第一步是分式线性，第二步在角宽$\pi/2$的第三象限中一一；复合仍一一。0和极点都在边界，不妨碍内部保形。

这是本章最值得独立重做的例题。以后遇到“两段圆弧围起来的区域”，首先想把交点送到0、∞。

图 6-8 上半单位圆 → 第三象限 → 上半平面



中间域为第三象限；分式线性与平方分别在各自源域中一一。

6.4 · 教材154—157页

19 两单位圆相交的透镜域：原书例2

取$D=\{|z|<1,\ |z-1|<1\}$，交点为

$$a=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,\qquad b=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

先令$t=(z-b)/(z-a)$。两条边界圆都通过a,b，所以变成通过0的直线；原域在交点的内角为$2\pi/3$，像域是同样角宽的扇域。

定位不能靠猜：边界点$z=1$映成$e^{2\pi i/3}$，$z=0$映成$e^{-2\pi i/3}$；内部点$z=1/2$映成-1。因此选择连续辐角

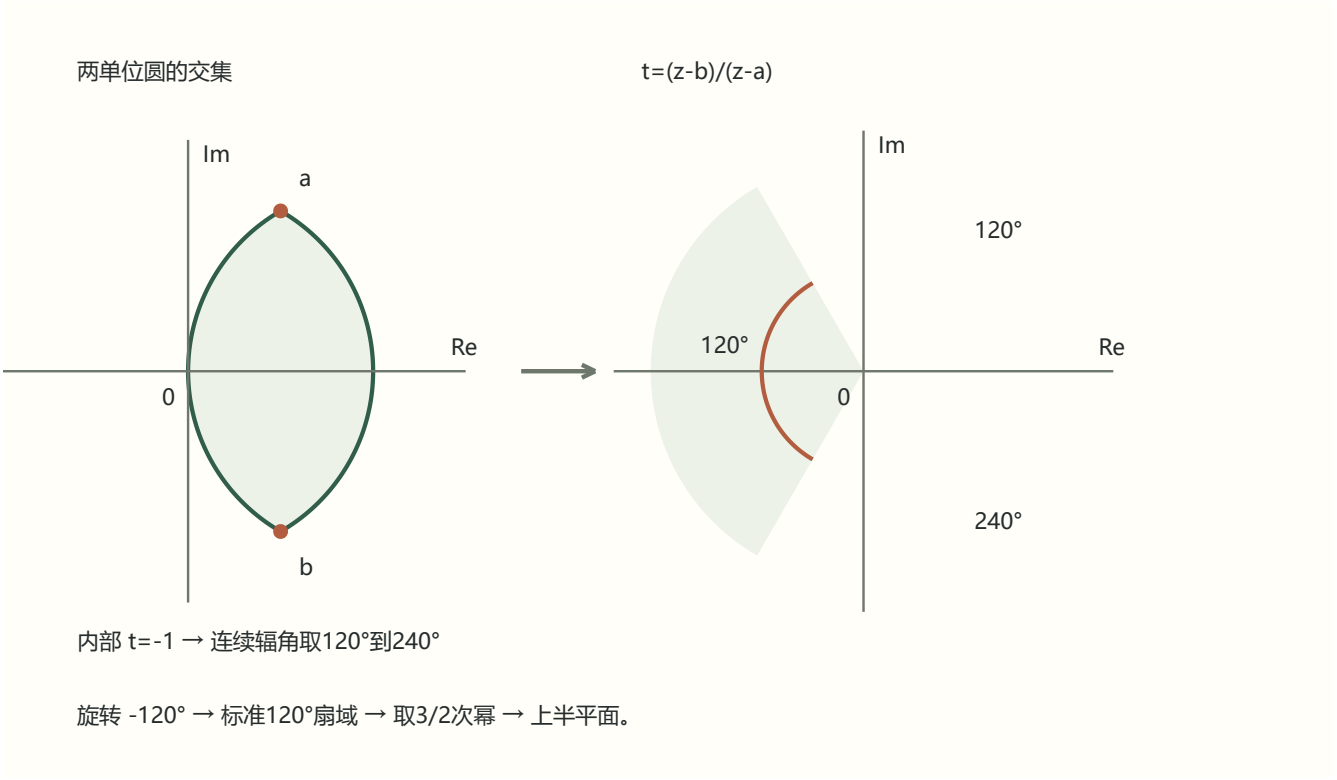
$$\frac{2\pi}{3}<\arg t<\frac{4\pi}{3}.$$

旋转$T=e^{-2\pi i/3}t$后，得到$0<\arg T<2\pi/3$；最后取

$$w=\exp\!\left(\frac{3}{2}\operatorname{Log}T\right),\qquad 0<\operatorname{Im}\operatorname{Log}T<\frac{2\pi}{3}.$$

像就是上半平面。这条三步路线比直接记$-t^{3/2}$更安全。教材先立方得到正轴割平面，再取上半平面的平方根，两步合起来就是上述$3/2$次幂；直接省略中间分支，很容易把目标旋转错。

图 6-9 透镜域先拉成120°扇域，再旋转、取3/2次幂



中间域跨负实轴，必须选连续辐角120°—240°，不能机械使用主值。

第六章 / 6.5

指数对数与条带

教材158—160页上部

6.5 · 教材158—160页上部

20 指数把直角网变成极坐标网

写$z=x+iy$，则

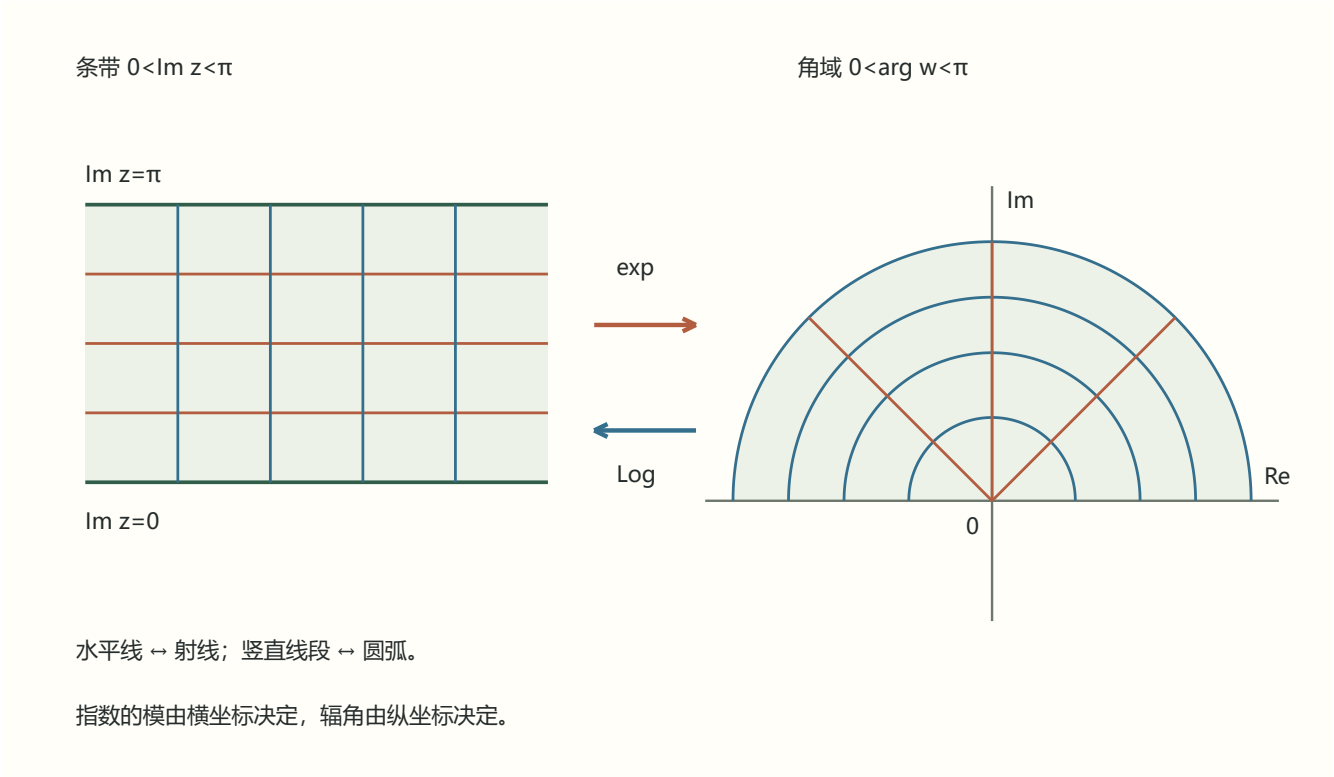
$$e^{z}=e^{x}e^{iy}.$$

水平线$y=y_0$映为射线，竖直线$x=x_0$映为圆或圆弧。水平条带$a<y<b$若高度$b-a\le 2\pi$，指数在其中一一，像为$a<\arg w<b$的角域；高度等于2π时是割平面。

导数e^z从不为零，只保证局部无退化；全平面的周期性仍会造成重叠。这是6.1区分局部与整体的第二个标准反例。

对数反过来把射线变为水平线、圆弧变为竖直线。扇域先选连续辐角，再用$\operatorname{Log} z=\ln|z|+i\arg z$，就得到水平条带。开角不超过$2\pi$的一一扇域最容易处理。

图 6-10 指数与对数：直角坐标网与极坐标网



高度π的条带对应上半平面；高度2π对应割平面；超过周期高度就不再一一。

6.5 · 教材158—160页上部

21 竖直条带到上半平面：原书例3

给定$a<\operatorname{Re} z<b$。指数直接作用在这里通常会因为虚方向无限延伸而重复覆盖；先把条带转成高度π的水平条带：

$$\zeta=\frac{\pi i}{b-a}(z-a).$$

因为$\operatorname{Im}\zeta=\pi(x-a)/(b-a)$，恰好落在$(0,\pi)$。再令$w=e^{\zeta}$，得到

$$w=\exp\left(\frac{\pi i}{b-a}(z-a)\right).$$

左边界$x=a$映为正实半轴，右边界$x=b$映为负实半轴；内部点$x=(a+b)/2,y=0$映成i。这是检查方向最省力的办法。

该式也是一一的：旋转伸缩先把原域一一映到高度π的条带，指数在该条带一一且覆盖整个上半平面。

6.5 · 教材158—160页上部

22 月牙域到条带：原书例4

两段圆弧在$-a, a$相交，教材用α, β表示在$-a$处相对于正实轴的切线方向，$0 < \beta - \alpha < 2\pi$。令

$$t = \frac{z + a}{z - a},$$

两条圆弧便变成从0出发的射线。由于$t'(-a) = -1/(2a)$为负实数，局部旋转π，可把像域连续辐角取为

$$\pi + \alpha < \arg t < \pi + \beta.$$

然后选这个分支的$\operatorname{Log} t$，得到高度$\beta - \alpha$的条带，再归一化到目标$0 < \operatorname{Im} w < h$：

$$w = \frac{h}{\beta - \alpha}\left[\operatorname{Log}\frac{z + a}{z - a} - i(\pi + \alpha)\right].$$

这道题的价值是组合路线：**两弧域 → 角域 → 条带 → 调整高度**。 不必死记$\pi + \alpha$的外观；换一个分式线性变换，辐角区间也会改变，必须和你自己的中间域配套。

6.5 · 教材158—160页上部

23 画一张变换账本，避免复合式越写越乱

每次复合都写四列：当前区域、使用函数、下一步区域、分支或一一性条件。比如透镜域到上半平面：

当前区域	变换	下一步区域	需要说明
两圆交集	$t = (z - b)/(z - a)$	角宽$2\pi/3$的扇域	内部点映到-1
扇域	$T = e^{-2\pi i/3} t$	$0 < \arg T < 2\pi/3$	只旋转
标准扇域	$w = T^{3/2}$	上半平面	用该扇域上的对数

写完才复合，不要一开始就追求一个长公式。圆弧问题优先分式线性，角域优先幂，条带优先指数，角域到条带优先对数。目标是圆盘时，最后再接凯莱变换。

第六章 / 6.6

儒可夫斯基变换与割线域

教材160—164页

6.6 · 教材160—164页

24 星号内容为什么值得学

儒可夫斯基变换

$$J(z)=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$$

把圆变椭圆、把圆盘内外变成线段割开的平面，能处理前面分式线性加幂不方便的裂缝边界。若课程不考星号内容，第一轮至少掌握一一性、椭圆参数式和割平面三个结论；复杂的多步裂缝例题可以第二轮复做。

这不表示“和习题无关”：原书习题11的径向割缝、斜向割缝都需要类似的“把裂缝拉直或打开”的思路。

注意本书归一化有$1/2$，对应焦点±1。有的教材用$z+1/z$，对应焦点±2，两套结果不能直接混用。

6.6 · 教材160—164页

25 一一性由互为倒数决定

若$J(z_1)=J(z_2)$且两个点非零，则

$$(z_1-z_2)\left(1-\frac{1}{z_1z_2}\right)=0.$$

所以两个不同点同像，当且仅当$z_1z_2=1$。因此单位圆内部的非零部分和单位圆外部都各自一一，因为同一区域里不可能同时含有一对互为倒数的不同点。

导数为

$$J'(z)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{z^2}\right),$$

仅在±1为零，它们恰在单位圆边界。0是简单极点，在球面意义下映成∞；普通平面叙述时须从圆盘内去掉0。

别把$z_1z_2=1$改成$z_2=1/\bar z_1$。 前者来自代数同像条件，后者是单位圆对称点，两种关系用途不同。

6.6 · 教材160—164页

26 圆变椭圆，射线变双曲线

令$z = re^{i\theta}$，写$J(z) = u + iv$，得到

$$u = \frac{1}{2}(r + r^{-1})\cos\theta, \qquad v = \frac{1}{2}(r - r^{-1})\sin\theta.$$

固定$r \neq 1$，是椭圆，半轴

$$A = \frac{r + r^{-1}}{2}, \qquad B = \frac{|r - r^{-1}|}{2}, \qquad A^2 - B^2 = 1.$$

所以所有椭圆焦点相同，都是± 1。$r < 1$时v系数为负，原圆逆时针走一圈，像椭圆顺时针走；$r > 1$时像椭圆逆时针走。这种方向变化不违反局部保角，原圆作为“圆盘内部边界”或“外部边界”的正向本来就不同。

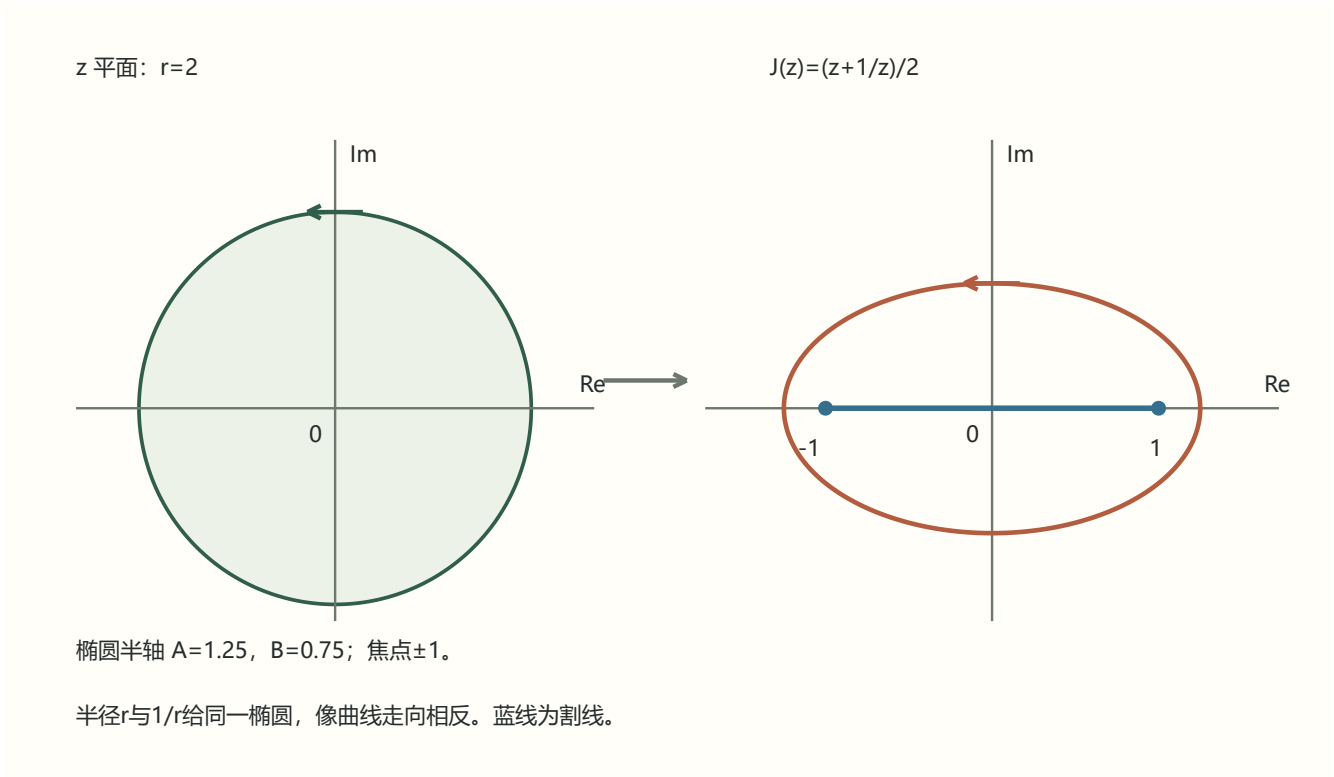
当$r \to 1$时，$A \to 1, B \to 0$，椭圆压成线段$[-1, 1]$。当$r \to 0$或$r \to \infty$，椭圆越来越大。

固定非轴向的θ，消去r得到

$$\frac{u^2}{\cos^2\theta} - \frac{v^2}{\sin^2\theta} = 1.$$

射线的一段对应一条双曲线的部分分支。原来的圆与射线正交，像椭圆与双曲线也正交。轴向角度需回到参数式看，不能在分母为0时套这个式子。

图 6-11 儒可夫斯基映射把圆变成共焦椭圆



图示 半径2：逆时针；r>1：像椭圆逆时针；椭圆焦点固定±1。

6.6 · 教材160—164页

27 像域和反函数：根号前的正负号怎么选

单位圆上$J(e^{i\theta})=\cos\theta$，线段被上下两段半圆各覆盖一次。圆盘内部和外部则分别一一映到去掉$[-1,1]$的扩充平面；普通平面中外部不含∞时，像也不含∞。

更具体地，

$$\operatorname{Im} J(z)=\frac{\operatorname{Im} z}{2}\left(1-\frac{1}{|z|^2}\right).$$

因此上半单位圆内部变到下半平面；上半平面中的单位圆外部变到上半平面。这个符号式比记图可靠。

反解二次方程得

$$z=w\pm\sqrt{w^2-1}.$$

两根乘积为1。对割平面$\mathbb{C}\setminus[-1,1]$，选解析分支$S(w)^2=w^2-1$，满足$S(w)\sim w$当$w\to\infty$。则外部反函数为$z=w+S(w)$，内部反函数为$z=w-S(w)$。

“满足$S\sim w$”是函数分支的条件；直接把每个数值w^2-1交给主平方根，跨到负实方向可能选错。第一轮能用“所求根模大于1或小于1”检查分支，就已经抓住关键。

6.6 · 教材160—164页

28 带竖直裂缝的上半圆外域：原书例5逐步走

原域是$\operatorname{Im} z>0,\ |z|>1$，再删去$z=iy,\ y\ge 2$。先令

$$w_1=J(z).$$

原来的上半圆周变成$[-1,1]$；整个上半圆外域原本会变成上半平面。裂缝上$z=iy$的像为

$$w_1=\frac{i}{2}\left(y-\frac{1}{y}\right),\qquad y\ge 2,$$

所以删去的射线变成$\operatorname{Re} w_1=0,\operatorname{Im} w_1\ge 3/4$。

再令$w_2=w_1^2$。上半平面被平方成正轴割平面，竖直裂缝又变成负轴上的射线$(-\infty,-9/16]$。于是

$$D_2=\mathbb{C}\setminus\big((-\infty,-9/16]\cup[0,\infty)\big).$$

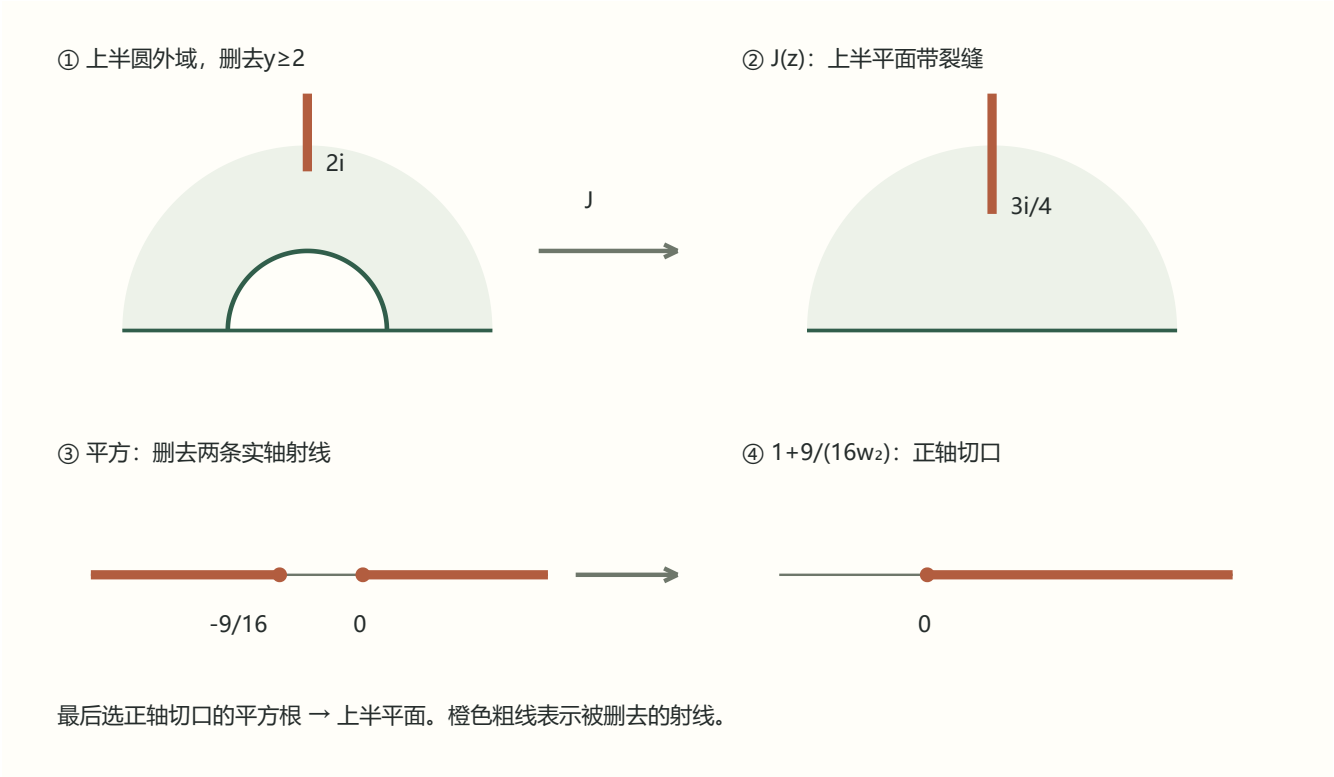
第三步令$w_3=1+9/(16w_2)$。这两条被删去的射线合在一起变成$[0,\infty)$：负射线映为$[0,1)$，正射线映为$(1,\infty)$，无穷远的边界极限对应1。

最后选$0<\arg w_3<2\pi$的平方根，$w=\sqrt{w_3}$，便得到上半平面。可以整理成

$$w^2=1+\frac{9z^2}{4(z^2+1)^2}=\frac{4z^4+17z^2+4}{4(z^2+1)^2}.$$

教材给出一个含根号的紧凑式；实际使用时要连同上述连续分支一起读。**把各层主平方根直接相乘相除，不能自动保留正确分支。** 例如$z=3i/2$处最终应取$\operatorname{Im} w>0$的根，可作为检验。

图 6-12 裂缝变换的四步区域账本



平方后删去(-∞,-9/16]与[0,∞)，下一步才把两条切口接到同一条正轴。

6.6 · 教材160—164页

29 余弦的映照：用已经会的三步解释

教材最后指出

$$\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$$

可以拆成$t = iz$、$T = e^t$、$w = J(T)$。对$0 < \operatorname{Re} z < 2\pi, \operatorname{Im} z > 0$，第一步得到$\operatorname{Re} t < 0,\ 0 < \operatorname{Im} t < 2\pi$，第二步得到沿正实半径割开的单位圆内部，且不含0。

儒可夫斯基先把整个去心单位圆一一变成$\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$；被删去的正实半径$(0, 1)$又映成$(1, \infty)$。因此最终像域是

$$\mathbb{C} \setminus [-1, \infty).$$

这段的用途是教你分解熟悉的初等函数，而非另外死记余弦的区域表。第一轮能写出三步及各自的域，便已达到本段的主要目标。

第六章 / 6.7

用保形变换求平面场的复势

教材164—166页

6.7 · 教材164—166页

30 先认清本书把电势放在虚部

本书这一节用$F(z)=u(x,y)+iv(x,y)$表示复势，**电势是$v=\operatorname{Im}F$，$u=$常数给出电力线族**。其他教材也有把电势放实部的约定；这里始终按本书来，防止最后取错部分。

C-R方程保证u,v调和，并且$\nabla u\cdot\nabla v=0$。在导数非零处，两族等值线正交。映到F平面后，$u=$常数是竖线，$v=$常数是横线。

求电势时常做的是：找坐标变换$\zeta=g(z)$，在ζ平面写简单复势$F_0(\zeta)$，然后

$$F(z)=F_0(g(z)),\qquad v(z)=\operatorname{Im}F(z).$$

坐标变换g和物理复势F不必是同一个函数。只有边界数值也正确时，映射才同时可以直接当复势。

更一般地，调和函数复合满足

$$\Delta_z(V\circ g)=|g'(z)|^2(\Delta_\zeta V)\circ g.$$

所以无源区的拉普拉斯方程保留下来；这正是整个方法能用于静电、稳态温度等问题的原因。

6.7 · 教材164—166页

31 两段无限金属板：原书例1

取上半平面，正实半轴电势为v_1，负实半轴为v_2，两者在原点绝缘。对数取$0<\arg z<\pi$：

$$\operatorname{Log}z=\ln r+i\theta.$$

它把上半平面映成高度π的条带，并把两段边界分别送到虚部0与π。因此

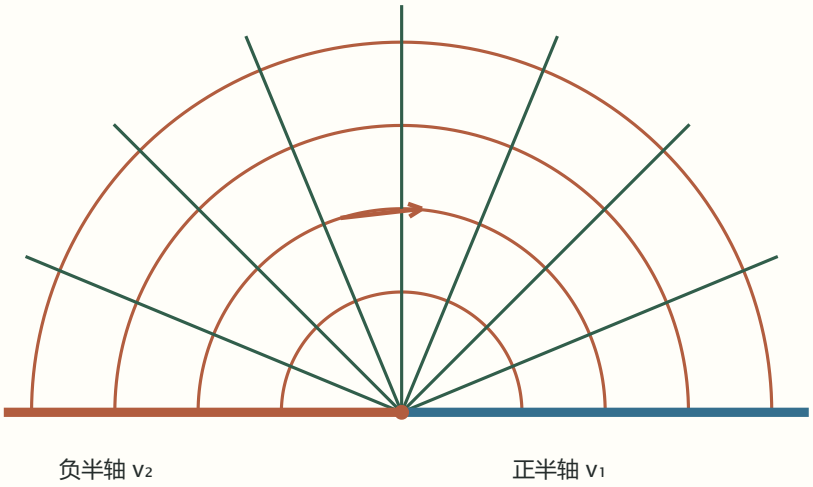
$$F(z)=\frac{v_2-v_1}{\pi}\operatorname{Log}z+iv_1,\qquad v(z)=v_1+\frac{v_2-v_1}{\pi}\arg z.$$

逐条验边界：$\theta\to0$得v_1，$\theta\to\pi$得v_2。电势只随角度变，与半径无关；等势线是射线，电力线是半圆。

若$v_2>v_1$，电场$\mathbf{E}=-\nabla v$沿角度减小方向，大小为$(v_2-v_1)/(\pi r)$。在绝缘接缝原点附近发散，是理想化的突变边界造成的；不能把原点当成普通内点验导数。

为什么保留物理解释？它直接帮你判断符号：电场应从高电势侧指向低电势侧，公式若给出相反方向就应重查。

图 6-13 两板电势：等势射线与电力线半圆



本书电势取复势虚部，所以射线为等势线，半圆为电力线。

6.7 · 教材164—166页

32 圆筒分成上下两半：原书例2

取单位圆内，上半圆电势0，下半圆电势1。先用

$$t = i\frac{1-z}{1+z}$$

把圆盘映到上半平面：$z=0 \mapsto i$；上半圆弧映成正实半轴，下半圆弧映成负实半轴。再套上一例 $v_1=0, v_2=1$：

$$F(z) = \frac{1}{\pi}\mathrm{Log}\left(i\frac{1-z}{1+z}\right), \qquad v(z) = \frac{1}{\pi}\mathrm{Arg}\left(i\frac{1-z}{1+z}\right),$$

其中$0 < \mathrm{Arg}\, t < \pi$。令$z=x+iy$，直接有

$$t = \frac{2y + i(1-x^2-y^2)}{(1+x)^2+y^2}.$$

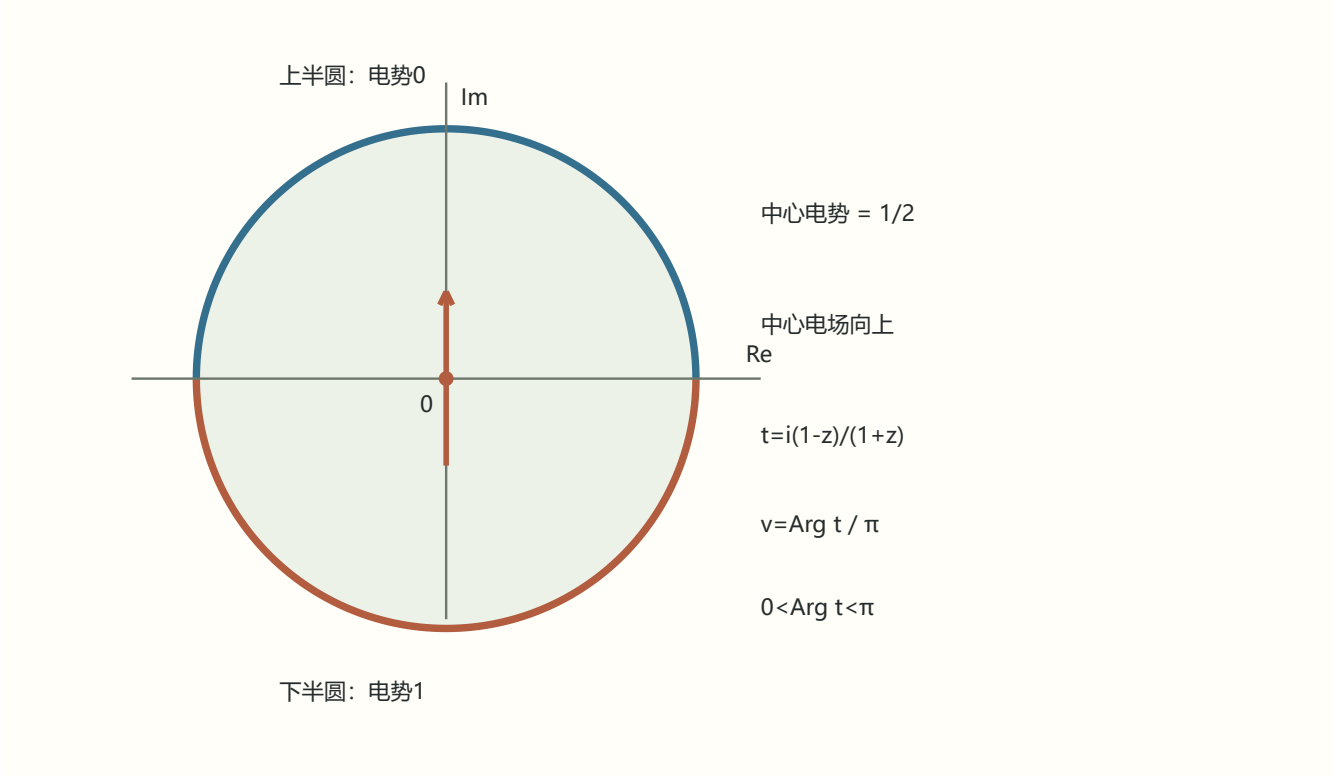
圆内$1-x^2-y^2>0$，所以取辐角的稳妥实数表达是

$$v(x,y)=\frac{1}{\pi}\operatorname{atan}2(1-x^2-y^2,\ 2y).$$

这里$\operatorname{atan}2(Y,X)$表示点$(X,Y)$的正确象限角，此处取值$(0,\pi)$。写成普通反正切时才需分$y>0, y=0, y<0$三段；不能直接用$\arctan(Y/X)$替代。

内部检查：$y=0$时$v=1/2$；上半圆边界除端点外趋于0，下半圆趋于1，中心也是$1/2$。绝缘端点±1的边界值跳跃，不要求同时连续等于0和1。

图 6-14 半圆筒：电势取复势虚部，中心场向上



端点±1为边界电势接缝；中心F′=-2/π，按本书约定得到Ey=+2/π。

6.7 · 教材164—166页

33 场强怎样从复势求出，掌握到哪里

按照本书“电势为虚部”的约定，C-R给出

$$F'(z)=v_y+iv_x,\qquad E_x=-v_x,\quad E_y=-v_y,\quad |\mathbf{E}|=|F'(z)|.$$

复合以后$F'(z)=F_0'(g(z))g'(z)$，所以场强大小还要乘$|g'(z)|$。电势值可以直接复合，梯度不能只把变量换名。

例：两板问题$F'=A/z$，$A=(v_2-v_1)/\pi$，故场强$|A|/r$。圆筒问题

$$F'(z)=\frac{1}{\pi}\frac{t'(z)}{t(z)}=-\frac{2}{\pi(1-z^2)},\qquad |\mathbf{E}|=\frac{2}{\pi|1-z^2|}.$$

中心场强$2/\pi$，方向向上，与电场从下方高电势指向上方低电势一致。具体代入$F'(0)=-2/\pi$，得$v_y=-2/\pi$，所以$E_y=2/\pi$。复导数的负号不能直接当成电场方向，必须按照本书的实部、虚部约定换回分量。

第一轮要求： 会找映射、配边界常数、取虚部、验中心和边界。若只考纯复变映照题，场强推导可稍后深入；本节不是完全无用的背景，它解释为什么要研究保形变换。

第六章 / 6.8

原书习题路线与全章速查

教材166—168页

6.8 · 教材166—168页

34 原书1—4题：导数与几何量

下表说的是原书题号；后面的“练习1—20”是本讲义自编检查题。

原书题号	在练什么	下笔第一步
1	z^3在指定点的伸缩与旋转	$f'=3z^2$，求模与辐角
2	哪些位置放大、缩小	解$\lvert f'\rvert>1$与$\lvert f'\rvert<1$，等号处既不放大也不缩小
3	参数曲线及像曲线的弧长	$w'=f'(z)z'$，模后积分
4	面积伸缩与具体面积	雅可比$\lvert f'\rvert^2$，再确认一一性

原书1的四点可用于自查：$z=1$时系数3、角0；$z=1/2$时系数$3/4$、角0；$z=1+i$时系数$\sqrt{6}$、角$\pi/2$；$z=\sqrt{3}-i$时系数12、角$-\pi/3$。

原书2：z^2在$|z|>1/2$放大、$|z|<1/2$缩小，但0处退化；$1/z$在$0<|z|<1$放大、$|z|>1$缩小；e^z在$x>0$放大、$x<0$缩小。

原书4给出的正方形$0<x<1, 0<y<1$在z^2下是一一的，像面积

$$\int_0^1\int_0^1 4(x^2+y^2)\,dx\,dy=\frac{8}{3}.$$

边界是否包含端点不影响面积数值，但保形区域应看开内部。

6.8 · 教材166—168页

35 原书5—9题：分式线性与归一化

原书题号	主方法	关键检查
5	倒数把过0的相切圆变直线	两条过0圆的像平行；第三条与两线相切，画清取哪侧
6	三点交比，逐小题定函数	注意给定点含∞；三组像点全部代回
7	上半平面到圆盘、指定$i \mapsto 0$	凯莱变换后用导数方向定旋转
8	圆盘自映射、$a = 1/2$	分母$1 - z/2$，导数方向为0
9	上半平面到下半平面、$a \mapsto \bar{a}$	先送到圆盘，再用下半平面的逆变换

原书9可这样具体做。设$a = \alpha + i\beta, \beta > 0$，用$t = (z - a)/(z - \bar{a})$，再令

$$w = \bar{a} - 2i\beta\,\frac{kt}{1 - kt}, \qquad |k| = 1.$$

这是圆盘到下半平面的变换，$t = 0$映到$\bar{a}$。在a处有$w'(a) = -k$，要角$-\pi/2$，可取$k = i$。然后应回代确认内部确实在下半平面。这条构造比硬联立四个复系数更容易掌控。

第5题的图没有给圆心和半径，所以不该凭空补出唯一数值图；解题时用相切关系推断“两平行线加一个相切圆”的结构，再选测试点确定原来的曲边三角形落在何处。

6.8 · 教材166—168页

36 原书10：相交两弧与相切两弧要分开

原书10的五个区域都要变到上半平面。先画原域，再判两段边界相交还是相切：

小题	几何结构	建议路线
10(1)：$y > 1,\ \lvert z\rvert < 2$	一条弦加圆弧，交点$\pm\sqrt{3} + i$	交点送0、∞ → 定角域 → 幂
10(2)：$\lvert z\rvert > 2,\ \lvert z - \sqrt{2}\rvert < \sqrt{2}$	两圆相交，交点$\sqrt{2} \pm i\sqrt{2}$	同上，注意取的是一圆外一圆内的月牙
10(3)：$\lvert z\rvert < 1,\ \lvert z + i\rvert < 1$	透镜，交点$\pm\sqrt{3}/2 - i/2$	分式线性拉直 → 角宽$2\pi/3$ → $3/2$次幂
10(4)：$\lvert z\rvert > 2,\ \lvert z - 3\rvert > 1$	两圆在2外切，取两圆外部	$t = 1/(z - 2)$ → 条带 → 指数
10(5)：$\lvert z\rvert < 2,\ \lvert z - 1\rvert > 1$	两圆在2内切，取大圆内小圆外	同一倒数 → 条带 → 指数

后两题不能硬找两个不同交点：它们只有一个切点。用$t = u + iv = 1/(z - 2)$反代，圆$\lvert z\rvert = 2$变成$u = -1/4$，圆$\lvert z - 3\rvert = 1$变成$u = 1/2$，圆$\lvert z - 1\rvert = 1$变成$u = -1/2$。

所以10(4)为$-1/4<u<1/2$；10(5)为$-1/2<u<-1/4$。再用6.5的竖直条带公式即可。10(4)若把原域视为扩充平面中含∞的外部区域，$t=0$是普通内点；若只取有限平面原域，则其像条带要去掉0，最终也需去掉一个内点，不能宣称满射整个上半平面。本书这类外域题按含无穷远的扩充区域理解。

6.8 · 教材166—168页

37 原书11：五道复合路线

11(1)扇形$0<\arg z<\alpha$，$|z|<1$：先用$z^{\pi/\alpha}$变上半单位圆，再接6.4例1变上半平面，最后接凯莱变换到单位圆。

11(2)单位圆到$0<\operatorname{Im} w<1$：先$t=i(1-z)/(1+z)$，再$w=\operatorname{Log} t/\pi$。它满足$z=i$时$t=1, w=0$，边界两端$\pm1$对应条带两端无穷远方向。

11(3)第一象限，指定$\sqrt{2}\,i, 0, 1$映为$-1, 1, \infty$：先$t=z^2$变上半平面，三点像为$-2, 0, 1$；再用实系数分式线性

$$w=\frac{2t+1}{1-t}$$

即可。其导数$3/(1-t)^2$，对上半平面保持到上半平面。

11(4)从中心沿正半径割开的单位圆：先选$0<\arg z<2\pi$的平方根，变成上半单位圆；再接上半单位圆到上半平面的变换。原点为裂缝端点，不在开域中。

11(5)第一象限沿$[0,1+i]$割开：先$t=z^2$，裂缝变成$[0,2i]$；再平方得到正轴割平面并额外删去$[-4,0]$，合起来删去$[-4,\infty)$；平移$s=t^2+4=z^4+4$，最后选正轴切口的平方根，

$$w=\exp\!\left(\frac{1}{2}\operatorname{Log}(z^4+4)\right),\qquad 0<\arg(z^4+4)<2\pi.$$

得到上半平面。每层在前一层所得区域内一一。形式上写$\sqrt{z^4+4}$可以，但必须附上这个分支。

6.8 · 教材166—168页

38 全章解题清单与公式速查

题型信号	首选工具	必须补上的条件
求局部旋转伸缩	$\arg f'$, $\lvert f'\rvert$	点在解析域内且$f'\neq 0$
给三点对应	交比或零极点形式	三点互异、代回核验
圆或直线的像	保圆性、三个点、反代方程	边界过极点才变直线
半平面与圆盘	凯莱变换、镜像点	测试内点，定旋转因子

题型信号	首选工具	必须补上的条件
两弧相交	交点送0、∞，再幂	正确内角与连续辐角
两弧相切	切点送∞	像为平行线后选条带
角域与条带	幂、对数、指数	角宽、高度、切口与分支
圆周与裂缝	儒可夫斯基或复合平方根	排除互为倒数的同像点
求边界电势	映简单域、配线性常数	本书电势取虚部，逐边验值

交卷前依次看：函数是否解析且导数非零；是否一一；边界点对应是否正确；像域在哪一侧；是否覆盖整个目标；根式、对数分支是否写明；无穷远是内部还是边界；物理边界常数与方向是否正确。

第六章 / 6.9

二十道自编检查题与完整解析

全章复习

6.9 · 全章复习 · 自编检查题

练习1 导数的几何意义

求$f(z)=z^3$在$z_0=1+i$处的旋转角与伸缩系数。该点附近面积扩大几倍?

展开解析：旋转角来自导数

$f'(1+i)=3(1+i)^2=6i$。旋转角为$\pi/2$，伸缩系数6，局部面积系数为$|6i|^2=36$。旋转角不是$\arg f(z_0)$。

6.9 · 全章复习 · 自编检查题

练习2 哪些区域被放大

对$f(z)=e^{2z}$，求局部长度被放大、缩小的区域。

展开解析：先对函数求导

$|f'|=|2e^{2z}|=2e^{2x}$。放大条件$x>-(\ln 2)/2$；缩小条件$x<-(\ln 2)/2$；等号线上系数为1。所有有限点导数非零，但整个平面仍因周期πi而不是一一映照。

6.9 · 全章复习 · 自编检查题

练习3 导数非零就一定保形吗

$f(z)=z^2$在去心平面内导数非零。说明为什么它不满足本书的整体保形要求，并给出一个可行的子域及像域。

展开解析：还缺一一性

$f(1)=f(-1)=1$，所以不是一一的。取第一象限$0<\arg z<\pi/2$，平方后辐角在$(0,\pi)$、模遍历$(0,\infty)$，一一覆盖上半平面。边界顶点0处导数为零不影响开象限内部。

6.9 · 全章复习 · 自编检查题

练习4 面积和弧长

求z^2把$0<x<1, 0<y<1$映成的面积；并求四分之一圆弧$z=e^{it}, 0\le t\le \pi/2$的像曲线长度。

展开解析：面积平方，弧长一次

正方形内部位于第一象限，映射一一，面积是$\iint 4(x^2+y^2)\,dx\,dy = 8/3$。圆弧上$|f'|=2, |z'|=1$，像长$\int_0^{\pi/2} 2\,dt=\pi$，对应单位上半圆。

6.9 · 全章复习 · 自编检查题

练习5 反变换与无穷远

求$T(z)=(2z+3)/(z+2)$的极点、$T(\infty)$、反函数，并检查行列式。

展开解析：反解时收集未知数

极点-2，无穷远像2，行列式$2\cdot 2-3\cdot 1=1\neq 0$。$wz+2w=2z+3$，故$z=(3-2w)/(w-2)$。像点$2$只能由$\infty$达到。

6.9 · 全章复习 · 自编检查题

练习6 三点确定变换

求$T(0)=1, T(1)=\infty, T(\infty)=0$的分式线性变换。

展开解析：先用零极点

$\infty \mapsto 0$使分子可取常数，$1 \mapsto \infty$使分母含$z-1$。设$T = k/(z-1)$，由$T(0)=1$得$k=-1$，故$T = 1/(1-z)$。三点代回均满足，行列式非零。

6.9 · 全章复习 · 自编检查题

练习7 圆边界的像

用$w = 1/z$求圆周$|z-1| = 1$的像，并说明圆内去掉0后的像域。

展开解析：反代方程定侧

代入$z = 1/w$：$|1-w| = |w|$，故$\mathrm{Re}\, w = 1/2$。圆内对应$|1-w| < |w|$，即$\mathrm{Re}\, w > 1/2$。原圆通过0，所以像边界为直线。0本来在圆周而非开圆内，严格说圆内无需再去掉0。

6.9 · 全章复习 · 自编检查题

练习8 内外不能靠图猜

判断$w = (z-i)/(z+i)$把下半平面变成什么区域。

展开解析：看极点属于哪一侧

实轴映成单位圆，下半平面包含极点$-i$，所以像是单位圆外部，在扩充意义下含∞。也可用$z=-2i$得到$w=3$，验证圆外。下半平面有限点去掉$-i$时，对应有限圆外。

6.9 · 全章复习 · 自编检查题

练习9 圆盘自映射的角度归一化

求把单位圆映到自身、把$a = i/2$映到0、在a处旋转角为$\pi/3$的分式线性变换。

展开解析：共轭和旋转都要写对

代入标准式：

$$w = e^{i\pi/3}\,\frac{z - i/2}{1 + (i/2)z}.$$

因为$\bar{a}=-i/2$。导数在a处为$e^{i\pi/3}/(1-1/4)=4e^{i\pi/3}/3$，伸缩系数$4/3$，角度正确。

6.9 · 全章复习 · 自编检查题

练习10 半平面指定点

构造上半平面到单位圆内的变换，使$2+i$映成0，并且该点处旋转角为0。

展开解析：用导数定旋转

先设$w=e^{i\phi}(z-2-i)/(z-2+i)$。在$a=2+i$处导数为$e^{i\phi}/(2i)$，辐角$\phi-\pi/2$。取$\phi=\pi/2$，故$w=i(z-2-i)/(z-2+i)$，该点导数为$1/2$。

6.9 · 全章复习 · 自编检查题

练习11 角域到上半平面

求$\pi/6<\arg z<\pi/2$到上半平面的一一保形变换，并求其中半径2圆弧的像。

展开解析：先旋转再开角

角宽$\pi/3$，先乘$e^{-i\pi/6}$，再立方，故$w=(e^{-i\pi/6}z)^3=-iz^3$。像辐角$(0,\pi)$，一一覆盖上半平面。原半径2圆弧变为上半圆弧$|w|=8,\operatorname{Im}w>0$。

6.9 · 全章复习 · 自编检查题

练习12 平方根的两种切口

分别写出负实轴割平面、正实轴割平面的一支平方根及像域。

展开解析：分支就是角度区间

负实轴割平面取$-\pi<\theta<\pi$，$w=\sqrt{r}\,e^{i\theta/2}$，像为右半平面。正实轴割平面取$0<\theta<2\pi$，同形式的根像为上半平面。原点及整条切口均不在源开域内。

6.9 · 全章复习 · 自编检查题

练习13 上半圆域复合

把$|z|<1, \operatorname{Im} z>0$映到上半平面，并检验$z=i/2$的像在目标域内。

展开解析：分式线性之后再平方

取$w=((z+1)/(z-1))^2$。内部测试点先映成$-3/5-4i/5$，平方得$-7/25+24i/25$，虚部正。两步分别在原域和第三象限中一一，因此复合一一。

6.9 · 全章复习 · 自编检查题

练习14 两个相切圆之间

把$|z|<2,\ |z-1|>1$在扩充意义下映到上半平面。

展开解析：切点送无穷远

切点2，令$t=1/(z-2)$。两条边界分别为$\operatorname{Re} t=-1/4$与$-1/2$，原域对应$-1/2<\operatorname{Re} t<-1/4$。宽度$1/4$，故可取

$$w=\exp\left(4\pi i\left[\frac{1}{z-2}+\frac{1}{2}\right]\right).$$

例如$z=-1$在原域内，$t=-1/3$，像角$2\pi/3$。这里原域本身有界，无需把∞当内部；2仅是边界切点。

6.9 · 全章复习 · 自编检查题

练习15 竖直条带

将$-1<\operatorname{Re} z<2$映到上半平面，说明两条边界的对应。

展开解析：先归一化高度

取$w=\exp[\pi i(z+1)/3]$。左边界像为正实半轴，右边界像为负实半轴。中心线$x=1/2$像为正虚半轴，因为相位为$\pi/2$，模为$e^{-\pi y/3}>0$。

6.9 · 全章复习 · 自编检查题

练习16 对数把扇形变条带

把$0<\arg z<\pi/3$一一映到$2<\operatorname{Im} w<5$。

展开解析：高度按角宽缩放

选$0<\arg z<\pi/3$的对数，取$w=(9/\pi)\operatorname{Log} z+2i$。虚部为$2+(9/\pi)\arg z$，范围$(2,5)$，实部遍历全实轴。导数$9/(\pi z)\neq 0$，对数在此角域一一。

6.9 · 全章复习 · 自编检查题

练习17 儒可夫斯基的椭圆

求$|z|=2$在$J(z)$下的像椭圆、焦点和走向，并给出$z=2i$的像。

展开解析：参数式一次解决

$u=(5/4)\cos\theta, v=(3/4)\sin\theta$，所以$u^2/(25/16)+v^2/(9/16)=1$，焦点$\pm 1$。原圆逆时针则像也逆时针。$J(2i)=3i/4$。若换成半径$1/2$，椭圆相同，但$v$符号反向，走向相反。

6.9 · 全章复习 · 自编检查题

练习18 裂缝怎样被平方打开

求上半平面去掉竖直线段$\{iy:0<y\le 2\}$后到上半平面的一一保形变换。

展开解析：把两条割线接起来

先$t=z^2$，上半平面像为正轴割平面，额外裂缝变为$[-4,0)$；两者并为$[-4,\infty)$。再令$s=t+4$，得正轴割平面，最后取$0<\arg s<2\pi$的平方根$w=\sqrt{z^2+4}$。指定$\operatorname{Im} w>0$即可确定根值。裂缝端点$2i$映到0，边界允许局部退化，开域内部导数非零。

6.9 · 全章复习 · 自编检查题

练习19 两板电势

上半平面正半轴电势2，负半轴电势5。求复势、电势与$z=i$处场强大小。

展开解析：最后验两条边界

按本书约定取$F=(3/\pi)\operatorname{Log}z+2i$，$0<\arg z<\pi$。电势$v=2+(3/\pi)\arg z$。在$i$处$v=7/2$，场强$|F'(i)|=3/\pi$。两半轴分别给2和5；$\operatorname{Re}F$只是$\ln r$项，不是这里的电势。

6.9 · 全章复习 · 自编检查题

练习20 半圆筒边界与中心检验

单位圆内，上半圆电势0、下半圆电势1。求中心电势和场强方向，并说明只用普通反正切会出什么问题。

展开解析：先看分支再看方向

由$F=\pi^{-1}\operatorname{Log}[i(1-z)/(1+z)]$得$F(0)=i/2$，故$v(0)=1/2$。$F'(0)=-2/\pi$，按$F'=v_y+iv_x$得到$v_x=0,v_y=-2/\pi$，电场向上、大小$2/\pi$。

在下半圆内$y<0$时，t的实部为负、虚部为正，辐角处于第二象限。普通$\arctan(\operatorname{Im}t/\operatorname{Re}t)$给负角，会漏加$\pi$，导致错误的负电势。使用取值$(0,\pi)$的$\operatorname{Arg}t$或$\operatorname{atan}2$可避免。

6.9 · 全章复习

39 学完以后怎样回到原书做题

先独立做检查题1—13、15—16，能完成说明基础映照工具已齐。然后回原书1、2、6、7、8，以及10(1)—10(3)、11(1)—11(3)，检查你能否不看路线写出每个中间域。

再做检查题14、17—20，对应相切边界、儒可夫斯基、裂缝与物理场。证明题3、4也应补上，它们用的是弧长与雅可比，而不是多背几个映照表。

如果某题卡住，先定位是哪一步：不会画原域、不会选把谁送到无穷远、不会判断内外、不会定角宽、还是没写分支。每次只补一个缺口，再把整条复合路线重算一遍。第六章的达标线是能独立构造并验证，而不是把所有公式背成一张没有区域条件的表。

来源、编排与掌握要求

依据用户提供的严镇军《数学物理方法》扫描本第六章整理；正文印刷页142—166上部，章末习题166—168。扫描PDF文件页序等于印刷页码加6。按原书节序覆盖各主题，以重新讲解、推导主线和例题说明组织，未逐字复制原文。自编检查题与原书习题分开编号，原书题号可在本章习题路线中查找；本文件不声称是全部原书习题的逐题答案册。

第一轮优先掌握能独立做题所需的概念、步骤和适用条件；背景、证明及拓展均说明用途和暂缓深究的边界。第六章含20道自编检查题及完整解析。公式与SVG内嵌，可离线阅读；屏幕答案默认折叠，打印时自动展开。整理日期：2026年10月22日。