数学物理方法 / 复变函数

第四章学习讲义

解析函数的级数表示

按原书4.1—4.4完整展开。从无穷求和讲到泰勒、罗朗和奇点分类，重点建立独立做题所需的判断、计算与适用条件。

严镇军教材配套讲读　　正文78—103页　　原书习题103—107页　　16道自编检查题

阅读方法与掌握边界

先看每节目标，再沿例题写出关键步骤，最后独立完成检查题。计算题先抓中心、区域和零点阶数；理论段落说明结论从哪里来，拓展段落说明为什么现在出现。

学习层次	完成标准
必须会算	能独立写出展开式、成立区域、零点或极点阶数。
必须理解	能解释为什么选用这条公式，以及它的前提。
证明思路	知道结论从哪里来；第一轮不要求复现所有估计。
拓展选学	知道用途，后续课程需要时再熟记特殊公式。

全章四项成果 能求收敛范围，能按指定中心展开，能按圆环选择正负幂，能检查孤立性并判断奇点类型。

第四章目录

4.1 幂级数 教材 78—82 页

4.2 解析函数的泰勒展开 教材 82—87 页

4.3 解析函数的罗朗展开 教材 87—96 页

4.4 孤立奇点的分类 教材 96—103 页

练习 练习与解题索引 教材 103—107 页

第四章 / 4.1

幂级数

教材印刷页 78—82 · 本节目标 求收敛半径，区分收敛与绝对收敛，并检查边界。

4.1 / 01 · 第78页

本章任务与级数的用途

教材开头说，要讨论解析函数的两种级数展开式，并用它们研究解析函数。

这里的“级数展开”，你先理解成：

> 把一个函数，写成无穷多个比较简单的项相加。

例如：

$$\frac{1}{1-z}=1+z+z^2+z^3+\cdots \qquad (|z|<1).$$

左边是一个分式，右边是一串幂。

这样做有什么用？

因为右边把函数的结构摊开了。以后我们能从展开式里直接读出：

- 某一项的系数；
- 函数在某点附近首先出现的是几次幂；
- 一个分母为零的地方，到底能不能补上；
- 第五章计算留数时需要的那个系数。

所以，这章真正要练的是“把函数改写成便于观察和计算的形式”。

但改写之前有个问题：

无穷多个东西相加，究竟能不能得到一个确定的数？

4.1 就在解决这件事。

4.1 / 02 · 第78页

复数项级数和部分和

教材中先写：

$$z_n=x_n+iy_n,$$

然后写：

$$\sum_{k=1}^{\infty} z_k = z_1 + z_2 + z_3 + \cdots.$$

这里没有新的复数运算，就是把一串复数依次相加。

例如：

$$1 + \frac{i}{2} - \frac{1}{4} - \frac{i}{8} + \frac{1}{16} + \cdots.$$

不过，**“一直加下去”还不是一个严格的定义**。

我们能实际算的是前面有限项的和：

$$S_1 = z_1,$$

$$S_2 = z_1 + z_2,$$

$$S_3 = z_1 + z_2 + z_3,$$

一般写成：

$$\boxed{S_n = \sum_{k=1}^{n} z_k.}$$

这叫作**部分和**。

然后考察：

$$S_1, S_2, S_3, \ldots$$

这一串数最终有没有趋近一个固定的、有限的复数。

如果：

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S,$$

就称原来的级数**收敛**，它的和就是 S。

应当区分下面两个对象：

对象	意思
z_n	第 n 个加进去的数

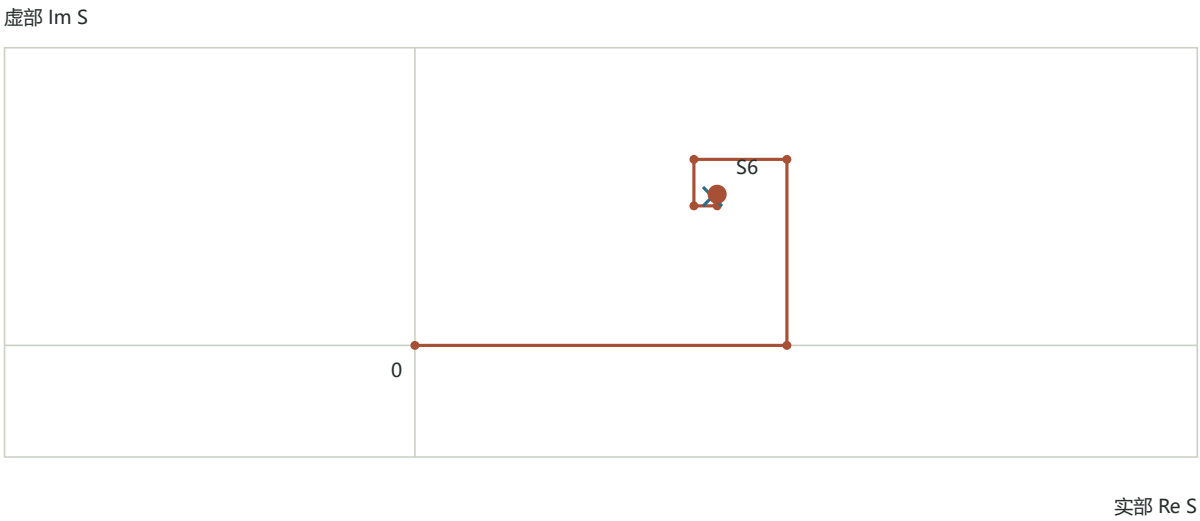
对象	意思
S_n	加完前 n 个数以后的总结果

级数收敛，检查的是 S_n 有没有极限。

这是这一定义的核心。

看下面的图。每加一项，部分和就在复平面上走一步。可以调公比和已加项数：

图 4-1 复数部分和的运动



公比 i/2；S6 = 0.8125 + 0.4063i；趋近 0.8 + 0.4i

当公比是 $i/2$ 时，每一步会转向，而且长度越来越短，部分和趋近一个固定位置。

当公比是 i 时，部分和依次经过：

$$1, \quad 1+i, \quad i, \quad 0, \quad 1, \ldots$$

一直循环，不能稳定到一个位置。

注意：在有限范围里打转，也可能发散。“没有越跑越远”不等于收敛。

这一段的掌握要求：你要能解释“部分和是什么”“收敛检查谁的极限”。不用背定义原话。

4.1 / 03 · 第78页

实部与虚部的收敛判别

因为：

$$z_k = x_k + iy_k,$$

所以：

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} x_k + i \sum_{k=1}^{n} y_k.$$

意思是：

> 所有实部加在一起，所有虚部加在一起。

一个复数要趋近固定位置，它的横坐标和纵坐标都必须趋近固定数。

因此：

$$\boxed{\sum z_k \text{ 收敛} \iff \sum x_k \text{ 和 } \sum y_k \text{ 都收敛}.}$$

这里的 $\iff$ 是“当且仅当”：两个方向都成立。

例如，教材中第 79 页例 1：

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} + \frac{i}{n} \right).$$

拆开以后：

$$\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}}_{\text{实部}} + i \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}}_{\text{虚部}}.$$

实部收敛，但虚部是发散的调和级数，所以原级数发散。

不能因为“一半收敛”，就认为整个复数级数收敛。

它就像平面上的点：横坐标稳定了，纵坐标还在变化，点仍然没有稳定下来。

做题怎么用：看见实部、虚部能方便拆开时，就用这个定理。通常不需要硬算整个部分和。

4.1 / 04 · 第79页

通项趋零的必要条件

教材中写：

$$\sum z_n \text{ 收敛} \quad \Longrightarrow \quad z_n \to 0.$$

为什么?

因为：

$$z_n = S_n - S_{n-1}.$$

如果前后两个部分和都趋近同一个数 S，那么：

$$z_n \to S - S = 0.$$

它的直观意思是：

> 如果最后已经快到终点了，每次再迈出去的那一步，必须越来越短。

但是，**每一步越来越短，不保证总路程会稳定**。

最典型的反例：

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots.$$

通项 $1/n \to 0$，总和却发散。

如果你忘记它为什么发散，可以这样分组：

$$1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{8}\right) + \cdots.$$

其中：

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \geq \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2},$$

下一组：

$$\frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{8} \geq 4 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{2}.$$

后面每一组都至少贡献 $1/2$，所以总和无法稳定为有限数。

做题时，正确用法是：

$$\boxed{z_n \not\to 0 \quad \Longrightarrow \quad \sum z_n \text{ 发散}.}$$

而当你发现 $z_n \to 0$ 时，**还没判断完，必须接着找别的方法**。

这一点必须熟练。 后面检查收敛圆周，经常就靠它直接判发散。

绝对收敛与条件收敛

教材中的定义是：

如果：

$$\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$$

收敛，那么称：

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n$$

绝对收敛。

这里“取模”的作用是，把方向去掉，只保留每一步的长度。

例如：

$$z_n = \frac{i^n}{2^n}.$$

由于 $|i^n| = 1$，所以：

$$|z_n| = \frac{1}{2^n}.$$

于是：

$$\sum |z_n| = \sum \frac{1}{2^n}$$

收敛，因此原级数绝对收敛。

教材中后面接着给出：

$$\boxed{\text{绝对收敛} \Longrightarrow \text{收敛}.}$$

为什么这个条件这么好用?

因为“总共走过的长度有限”，足以保证部分和最终趋近一个位置。你不必依赖不同方向之间的抵消。

但反过来不一定成立。比如：

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

收敛，而取绝对值以后变成：

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots,$$

发散。

这种“本身收敛，但不绝对收敛”的情形，叫作**条件收敛**。

因此，看到一道收敛判断题，你至少要分清：

结论	需要满足什么
绝对收敛	$\sum \lvert z_n \rvert$ 收敛
条件收敛	$\sum z_n$ 收敛，但 $\sum \lvert z_n \rvert$ 发散
发散	$\sum z_n$ 本身就不收敛

特别注意：

$$\sum |z_n| \text{ 发散}$$

只能说明“不绝对收敛”，**不能直接宣布原级数发散**。

原级数仍可能通过正负或方向抵消而收敛。

教材这一页还给了一个定理：

$$\sum z_n \text{ 绝对收敛} \iff \sum x_n, \sum y_n \text{ 都绝对收敛}.$$

它来自：

$$|x_n| \le |z_n|, \qquad |y_n| \le |z_n|,$$

以及：

$$|z_n| \le |x_n| + |y_n|.$$

这几行为什么要讲？ 它保证了“整体取模”和“拆成实、虚部取绝对值”两种做法能互相对应。

现在掌握到什么程度：会取模、会判断“绝对收敛推出收敛”，并记住反向推不回来。上面几条不等式能看懂即可，不需要单独背一份证明。

4.1 / 06 · 第79页

几何级数及其成立范围

教材中讨论：

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + \cdots.$$

这一题你必须吃透，因为后面许多展开都靠它。

先求前 N 项的和：

$$S_N = 1 + z + z^2 + \cdots + z^{N-1}.$$

两边乘 z：

$$zS_N = z + z^2 + \cdots + z^N.$$

相减：

$$(1-z)S_N = 1 - z^N.$$

当 $z \neq 1$ 时：

$$S_N = \frac{1 - z^N}{1 - z}.$$

然后才考虑 $N \to \infty$。

情况 1： $|z| < 1$。

这时：

$$|z^N| = |z|^N \to 0.$$

所以：

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}, \qquad |z| < 1.}$$

而且：

$$\sum |z^n| = \sum |z|^n$$

也收敛，所以这里是**绝对收敛**。

情况 2： $|z| \geq 1$。

这时：

$$|z^n| = |z|^n \geq 1,$$

通项连零都不趋近，因此级数发散。

于是得到完整答案：

$$\boxed{\begin{cases} |z| < 1：\text{绝对收敛，和为 } 1/(1-z), \\ |z| \geq 1：\text{发散}. \end{cases}}$$

后续反复使用的是这个模板：

$$\boxed{\frac{1}{1-q}=\sum_{n=0}^{\infty}q^n,\qquad |q|<1.}$$

这里的 q 可以是一整个表达式。

例如：

$$q=\frac{z-1}{2},$$

就有：

$$\frac{1}{1-\frac{z-1}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-1}{2}\right)^n,\qquad |z-1|<2.$$

公式与成立条件必须一起写。

举个很能暴露错误的例子：如果把 $z=2$ 直接代入，就会写成：

$$1+2+4+8+\cdots=\frac{1}{1-2}=-1.$$

这当然不成立。问题出在：你把一个只对 $|z|<1$ 成立的等式，用到了范围外。

展开题中，条件是答案的一部分。

4.1 / 07 · 第80页

幂级数的中心与系数

教材写：

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-a)^n=a_0+a_1(z-a)+a_2(z-a)^2+\cdots.$$

先分清三个角色：

符号	角色
a	固定的展开中心
a_n	每一项前面的固定系数
z	可以变化的自变量

a 和 a_n 虽然都用了字母 a，却是不同的东西。

例如：

$$1+\frac{z-1}{2}+\frac{(z-1)^2}{2^2}+\frac{(z-1)^3}{2^3}+\cdots$$

就是一个幂级数。

它的：

$$a=1,\qquad a_n=\frac{1}{2^n}.$$

如果固定一个 z，比如 $z=1+i$，就变成：

$$1+\frac{i}{2}+\frac{i^2}{2^2}+\cdots,$$

也就是前面讨论过的普通复数项级数。

所以：

> 幂级数的特点，是同一个表达式中，z 可以取不同值。

某些 z 代进去收敛，某些 z 代进去发散。我们现在要找的是：

到底哪些 z 可以让它收敛？

如果在某个范围内收敛，每个 z 都对应一个和，这就得到了教材中所说的**和函数**：

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-a)^n.$$

“和函数”只是“把这一串加起来得到的函数”，没有额外神秘的含义。

还有一个容易漏掉的事实：

在中心 $z=a$，它一定收敛，和就是 a_0。

因为其余所有含正次幂的项都变成零。

阿贝尔定理与收敛圆结构

这一页的定理分两条。

第一条：

> 如果幂级数在某点 $z_0\neq a$ 收敛，那么在所有比 z_0 更靠近中心 a 的点，都绝对收敛。

写成：

$$\sum a_n(z_0-a)^n \text{ 收敛}$$

则：

$$\boxed{|z-a|<|z_0-a| \quad \Longrightarrow \quad \sum a_n(z-a)^n \text{ 绝对收敛.}}$$

这里比较的是**到中心的距离**。

例如，中心在 $a=1$，已知在 $z_0=3$ 收敛。

由于：

$$|3-1|=2,$$

所以整个：

$$|z-1|<2$$

里面都绝对收敛。

它保证了一整块圆形区域，远远超过“实轴上某一段”。

为什么成立？教材下面那一长段证明，核心只有这一步。

已知：

$$\sum a_n(z_0-a)^n$$

收敛，那么它的通项趋于零，所以这些通项的模有一个共同上界 M：

$$|a_n(z_0-a)^n|\le M.$$

现在选一个更靠近中心的 z，令：

$$q=\frac{|z-a|}{|z_0-a|}<1.$$

于是：

$$\begin{aligned}|a_n(z-a)^n| &= |a_n(z_0-a)^n|\left(\frac{|z-a|}{|z_0-a|}\right)^n \\ &\le Mq^n.\end{aligned}$$

右边的：

$$\sum Mq^n$$

是收敛的几何级数，所以左边取模后的级数也收敛。

证明完成。

你可以把这个过程理解为：

> 向圆心靠近以后，第 n 项多乘了一个 q^n。因为 $q<1$，这个因子会越来越小，把它压进一个收敛的几何级数里。

为什么要讲这段证明？

因为它解释了：幂级数的收敛范围为什么由“距离”决定，以及圆内为什么能保证绝对收敛。这正是后面收敛圆的依据。

掌握要求：理解“用 Mq^n 控制通项”的思路。首次学习不必默写教材中整段证明。

定理第二条：

> 如果在某个点发散，那么比这个点离中心更远的所有点都发散。

原因也很直接：假如外面某点收敛，按第一条，里面这个点就应该绝对收敛，产生矛盾。

但是，同样远的点，不能靠这两条定理互相判断。

这个细节马上就会影响做题。

4.1 / 09 · 第81页

收敛半径的计算

前面说明，幂级数的收敛情况有一个圆形结构。

这个圆的半径，叫作**收敛半径**，记作 R。

当 $0<R<\infty$ 时：

$$\boxed{\begin{aligned}&|z-a|<R \quad \text{绝对收敛},\\&|z-a|>R \quad \text{发散},\\&|z-a|=R \quad \text{需要单独判断}.\end{aligned}}$$

最重要的是第三行。

收敛半径把“圆内”和“圆外”分开了；圆周上的结论，还没有给你。

另外两种特殊情况：

- $R=\infty$：所有有限的复数 z 都能使它收敛。

- $R=0$：只有中心 $z=a$ 收敛。

教材这一页先借助实幂级数解释复幂级数。这段的作用，是把实变量中熟悉的收敛半径推广到复平面。

做本章计算题时，你不必每次再绕回实幂级数。直接使用上面三行结论即可。

收敛半径怎么求?

对：

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n,$$

如果相邻系数的比值可用，并且极限存在：

$$L=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|,$$

那么：

$$\boxed{R=\frac{1}{L}.}$$

这里约定：

$$L=0\Rightarrow R=\infty, \qquad L=\infty\Rightarrow R=0.$$

教材中还给出根值形式：如果相应极限存在，

$$L=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|},$$

同样有：

$$R=\frac{1}{L}.$$

先优先练比值形式，通常比较好算。

为什么要取倒数?

因为整个通项取模后的相邻比值是：

$$\left|\frac{a_{n+1}(z-a)^{n+1}}{a_n(z-a)^n}\right|=\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right||z-a|.$$

极限为：

$$L|z-a|.$$

比值小于 1 时收敛，因此要求：

$$L|z-a|<1,$$

即：

$$|z-a|<\frac{1}{L}.$$

所以半径就是 $1/L$。

这里有两个做题提醒：

1. 代入公式的是系数 a_n，别把中心 a 混进去。
2. 如果系数中有很多零，导致相邻比值没法算，就换方法；不要硬除。例如 $\sum z^{2n}$，直接把它看成公比为 z^2 的几何级数即可。

4.1 / 10 · 本节应用

收敛圆周上的三种情形

原题的三个级数是：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^2},\qquad \sum_{n=0}^{\infty}z^n,\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}.$$

先看第一个：

$$a_n=\frac{1}{n^2}.$$

于是：

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\frac{n^2}{(n+1)^2}\to 1,$$

所以：

$$R=1.$$

第二个系数都是 1，显然也是：

$$R=1.$$

第三个：

$$a_n = \frac{1}{n}, \qquad \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{n}{n+1} \to 1,$$

因此还是：

$$R = 1.$$

半径算完了，接着检查圆周 $|z| = 1$。

第一个：$\sum z^n/n^2$。

在圆周上：

$$\left|\frac{z^n}{n^2}\right| = \frac{|z|^n}{n^2} = \frac{1}{n^2}.$$

而：

$$\sum \frac{1}{n^2}$$

收敛，所以整个圆周上都**绝对收敛**。

如果你暂时忘了它为什么收敛，可以用：

$$\frac{1}{n^2} \le \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \qquad (n \ge 2).$$

右边相加会大量抵消，总和有上界。

因此，第一个级数：

$$\boxed{|z| \le 1 \text{ 都绝对收敛；} |z| > 1 \text{ 发散.}}$$

第二个：$\sum z^n$。

在圆周上：

$$|z^n| = 1.$$

通项不趋于零，所以整个圆周上都发散。

因此：

$$\boxed{|z| < 1 \text{ 绝对收敛；} |z| \ge 1 \text{ 发散.}}$$

第三个：$\sum z^n/n$。

取圆周上的两个点，就足以完成教材中“举例说明”的要求。

在 $z=1$：

$$\sum \frac{z^n}{n}=\sum \frac{1}{n},$$

发散。

在 $z=-1$：

$$\sum \frac{z^n}{n}=\sum \frac{(-1)^n}{n},$$

是交错调和级数，收敛。

但取模后：

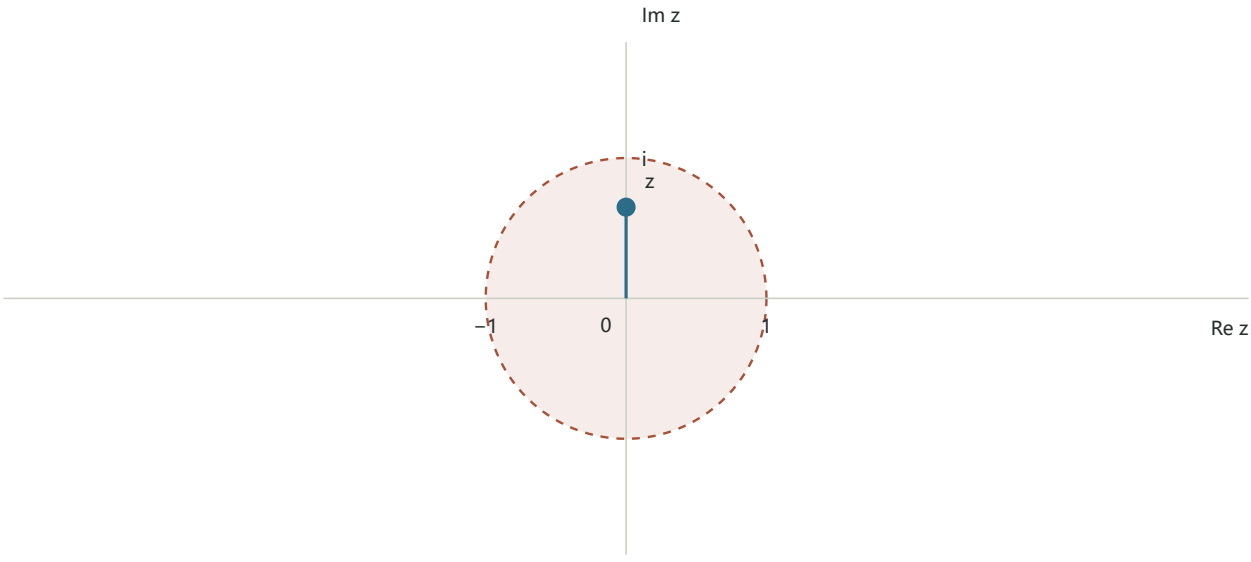
$$\sum \left|\frac{(-1)^n}{n}\right|=\sum \frac{1}{n}$$

发散，所以这里是**条件收敛**。

因此，同一个圆周上，已经同时找到了收敛点和发散点。

把下面图中的距离调到 1，切换级数与方向，就能看到这些差别：

图 4-2 收敛圆与圆周判别



收敛圆周 R = 1

幂级数 Σ z^n/n（n 从 1 开始）；复数方向 向上：正虚轴；圆内：绝对收敛。

以后做题，“求收敛半径”和“讨论完整收敛范围”要分清。 后者可能还需要检查边界；复平面的边界是一整个圆周。

4.1 / 11 · 第82页

逐项求导与逐项积分

教材现在讨论：

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-a)^n,\qquad |z-a|<R.$$

它告诉你，在收敛圆内部，可以把每一项分别求导：

$$\boxed{f'(z)=\sum_{n=1}^{\infty}na_n(z-a)^{n-1}.}$$

还可以继续求高阶导数：

$$f^{(k)}(z)=\sum_{n=k}^{\infty}n(n-1)\cdots(n-k+1)a_n(z-a)^{n-k}.$$

这串系数看着长，其实就是普通求导：

$$\frac{d^k}{dz^k}(z-a)^n=n(n-1)\cdots(n-k+1)(z-a)^{n-k}.$$

这段为什么必须讲？

因为它允许我们从已经知道的展开式，制造新的展开式。教材中习题 2 的第（6）题就直接用它。

从：

$$\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty}z^n,\qquad |z|<1,$$

两边求导：

$$\frac{1}{(1-z)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}nz^{n-1}.$$

再乘 z：

$$\boxed{\frac{z}{(1-z)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}nz^n,\qquad |z|<1.}$$

一道展开题就做完了。

你需要学会这种操作：

看见待展开函数与某个熟悉函数存在求导、积分或乘除关系，就从熟悉的展开式出发。

教材中还说可以逐项积分。例如从中心 a 积到 z：

$$\boxed{\int_a^z f(\zeta)\,d\zeta=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}(z-a)^{n+1},\qquad |z-a|<R.}$$

这里的 ζ 只是积分时使用的变量，避免和终点 z 混淆。

例如：

$$\int_0^z \frac{1}{1-\zeta}\,d\zeta=z+\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}+\cdots,\qquad |z|<1.$$

后面学习对数函数展开时，就会用上这个思路。

现在的掌握要求：

- 会逐项求导、积分；
- 处理正确幂次、系数和求和起点；
- 记住上述操作在收敛圆内部成立。

不要未经检查，就把圆内的操作延伸到圆周上。

4.1 / 12 · 第82页

系数与高阶导数

教材中最后给出：

$$\boxed{a_k=\frac{f^{(k)}(a)}{k!}.}$$

它说得很快：“在前面的式子里令 $z=a$ 即得。”

我们把这一步展开。

先写：

$$f(z)=a_0+a_1(z-a)+a_2(z-a)^2+a_3(z-a)^3+\cdots.$$

代入 $z=a$，所有正次幂都消失：

$$f(a)=a_0.$$

求一次导：

$$f'(z)=a_1+2a_2(z-a)+3a_3(z-a)^2+\cdots.$$

再代入 $z=a$：

$$f'(a)=a_1.$$

求两次导：

$$f''(z)=2a_2+6a_3(z-a)+\cdots,$$

代入 $z=a$：

$$f''(a)=2a_2.$$

所以：

$$a_2=\frac{f''(a)}{2!}.$$

同理：

$$f^{(3)}(a)=3!a_3.$$

一般就有：

$$f^{(k)}(a)=k!a_k.$$

因此：

$$\boxed{a_k=\frac{f^{(k)}(a)}{k!}.}$$

原理就是：求 k 次导，再代入中心，恰好把第 k 项的系数单独留下。

比它次数低的项，已经被求导求没了；次数高的项，仍含有 $z-a$，代入后变成零。

这一段还告诉你：幂级数的和函数在收敛圆内解析。这里“解析”沿用前面的定义，指函数在邻域中具有复导数。

这段为什么要讲？

它是下一节泰勒展开的入口：

$$f(z)=f(a)+f'(a)(z-a)+\frac{f''(a)}{2!}(z-a)^2+\cdots.$$

但到这里，我们证明的方向是：

如果一个函数已经表示成幂级数，那么它的系数一定由这些导数决定。

下一节要进一步回答：

一个解析函数，是否一定能写成这样的幂级数？能在哪个范围内写？

这就是 4.1 和 4.2 的衔接。

4.1 / 13 · 本节应用

本节掌握标准

暂时以本章习题为标准，下面这些要能独立完成：

1. 分清通项 z_n 和部分和 S_n。
2. 会用“通项不趋于零”直接判发散。
3. 分清收敛、绝对收敛、条件收敛。
4. 熟练使用

$$\frac{1}{1-q}=\sum_{n=0}^{\infty}q^n,\quad |q|<1.$$

5. 能从幂级数中认出中心、系数，求收敛半径，并按题目要求检查边界。
6. 会逐项求导、积分，理解

$$a_n=f^{(n)}(a)/n!.$$

阿贝尔定理和收敛圆结构的证明，**先理解关键逻辑，不要求第一次就能复现教材全部文字**。几何级数、收敛半径和适用条件，则必须练到会算。

衔接下一节：本节说明幂级数的和函数在圆内解析，并能由导数恢复系数。下一节反过来证明：解析函数能够展开成这样的幂级数。

第四章 / 4.2

解析函数的泰勒展开

教材印刷页 82—87 · 本节目标 以指定中心展开函数，写明范围，并读出零点阶数。

4.2 / 01 · 本节应用

泰勒定理与解析条件

第 82 页开头：前节和这一节的区别是什么？

前节最后，我们知道：

如果已经有

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-a)^n,$$

那么它在收敛圆内解析，而且

$$a_n=\frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

这一节反过来问：

> 已知一个函数解析，它一定能写成这样的幂级数吗？

答案是：**能，在展开中心附近一定能。**

这就是泰勒定理：

$$\boxed{f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n.}$$

展开写：

$$\boxed{f(z)=f(a)+f'(a)(z-a)+\frac{f''(a)}{2!}(z-a)^2+\frac{f'''(a)}{3!}(z-a)^3+\cdots.}$$

注意这里的前提：

f 要在 a 附近解析。

单独知道某个位置的一个导数存在，还不够支撑后面的全部结论。

教材还提到：实变量函数即使有任意阶导数，也未必等于自己的泰勒级数。它是在强调复解析函数的一个强性质。

这句话对做题有什么用？ 它告诉你：在本章的复解析条件下，泰勒展开能真正表示原函数。首次学习不用专门研究实变量反例。

4.2 / 02 · 第82—84页

收敛范围与泰勒定理的证明

教材说：以 a 为中心，把圆不断扩大，直到圆周碰到函数的奇点。

对于本章常见函数，先把能消掉的因子消掉、把可补的洞补好，再找真正的奇点。于是：

$$\boxed{R = \text{展开中心 } a \text{ 到最近真正奇点的距离.}}$$

泰勒展开在

$$\boxed{|z-a| < R}$$

中成立。

例如：

$$f(z) = \frac{1}{1-z}$$

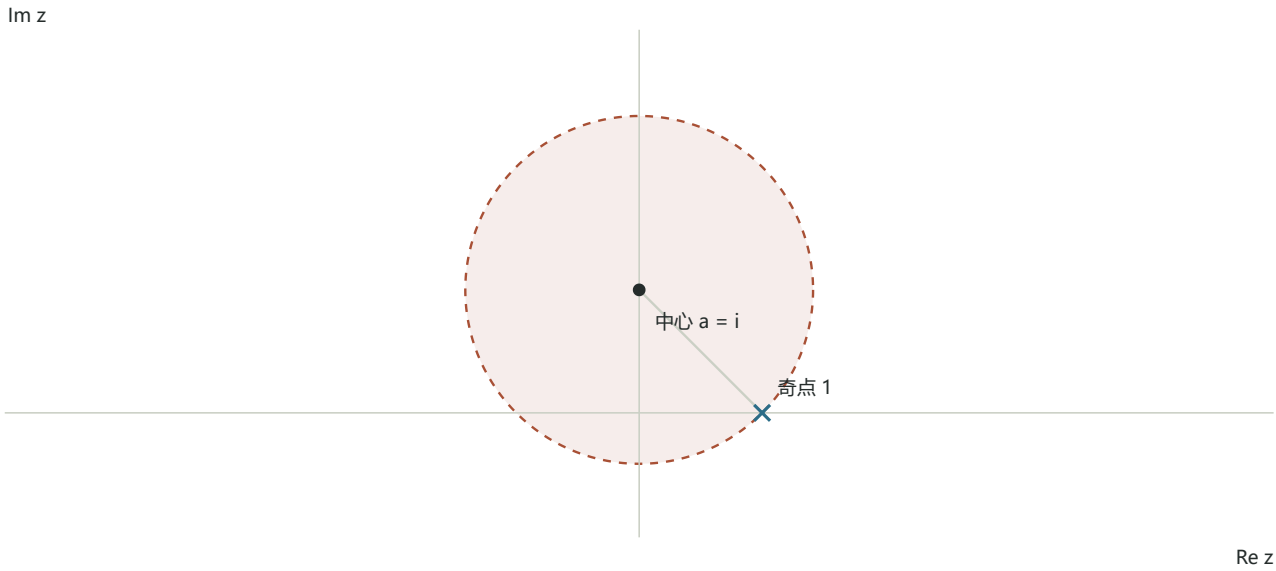
只有一个有限奇点 $z = 1$。

- 在 $a = 0$ 展开：$R = |1 - 0| = 1$。
- 在 $a = i$ 展开：$R = |1 - i| = \sqrt{2}$。

同一个函数，换展开中心，展开式和收敛半径都可能改变。

下面可以切换函数与中心。圆心是展开中心，叉号是真正的奇点：

图 4-3 泰勒展开与最近奇点



函数和展开中心 1/(1−z)，中心 a = i；收敛半径 R = √2；阴影区域内可作泰勒展开。

还有一个特别容易误会的例子：

$$f(z)=\frac{1}{1+z^2}.$$

它在整个实轴上都没有分母为零的地方，但在复平面上有：

$$z=i,\qquad z=-i.$$

所以在 0 点的泰勒展开，收敛半径仍然只有：

$$R=1.$$

不能只在实轴上找奇点。

教材第 83 页的证明，看起来很长，核心可以拆成四步。

第一步：用第三章的柯西积分公式表示函数。

取一个以 a 为中心、包住 z、内部没有奇点的圆周 C：

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta.$$

这里：

- z 是我们要计算的点；
- ζ 是在圆周上跑的积分变量。

第二步：把分母配成几何级数。

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - a}\frac{1}{1 - \frac{z-a}{\zeta - a}}.$$

因为 z 在圆内，ζ 在圆周上，所以：

$$\left|\frac{z-a}{\zeta - a}\right| < 1.$$

因此：

$$\frac{1}{\zeta - z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(\zeta - a)^{n+1}}.$$

第三步：代回积分，把每个 $(z-a)^n$ 前面的系数找出来。

得到：

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}}\, d\zeta\right](z-a)^n.$$

第四步：用柯西高阶导数公式认出系数。

中括号正好等于：

$$\frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

于是得到泰勒展开。

教材中间估计余项的那些不等式，是为了保证上面“积分与无限求和交换”合法。余项被控制为类似：

$$\frac{Mq^N}{1-q}, \qquad 0 \le q < 1.$$

当 $N \to \infty$ 时，这个上界趋于零。

这段证明为什么讲？

它解释了三件事：

- 为什么解析函数确实能展开；
- 为什么系数是导数除以阶乘；
- 为什么证明要求点严格位于圆内。

掌握要求：会讲这四步的逻辑；做普通展开题时，不需要重新写一遍余项估计。

4.2 / 03 · 第84页

展开唯一性及其用途

教材接下来讲唯一性。

如果在同一个中心 a 附近：

$$f(z)=\sum a_n(z-a)^n=\sum b_n(z-a)^n,$$

那么：

$$a_n=b_n=\frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

所以：

$$\boxed{\text{同一函数在同一中心的泰勒展开是唯一的。}}$$

它对做题有什么用？

你不必每次都求一大堆高阶导数。只要通过合法运算找出了一个成立的幂级数，它就已经是泰勒展开。

例如：

$$\frac{1}{1-z}=1+z+z^2+\cdots$$

既然已经成立，就不用再计算十次导数确认系数是不是 1。

教材随后把两个方向合在一起：

$$\boxed{\text{局部解析}\iff\text{局部可以表示成收敛的幂级数.}}$$

这里“局部”指在每个点的某个邻域中，不是说整个区域共用一个展开中心。

现在能用这个结论即可，不必把它当作另一套全新定义再背一遍。

4.2 / 04 · 第84—85页

指数与三角函数的基础展开

$$\boxed{e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}=1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\cdots.}$$

$$\boxed{\sin z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}=z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\cdots.}$$

$$\boxed{\cos z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}=1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\cdots.}$$

这三个式子对所有有限复数 z 都成立，收敛半径是：

$$R=\infty.$$

你记忆时抓住结构：

- e^z：所有非负整数次幂；
- $\sin z$：只有奇次幂；
- $\cos z$：只有偶次幂；
- 正弦、余弦交替变号；
- 分母是对应幂次的阶乘。

加上前节的：

$$\boxed{\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty}z^n,\qquad |z|<1,}$$

这四个是后面展开题最常用的出发点。

非零中心的分式展开

题目说“在 $z=i$ 展开”，意味着答案必须按：

$$(z-i)^n$$

排列。

做题的第一步：把展开中心平移到零。

令：

$$w=z-i.$$

于是：

$$z = i + w,$$

所以：

$$\frac{1}{1-z} = \frac{1}{1-i-w}.$$

提出常数 $1-i$：

$$\frac{1}{1-i-w} = \frac{1}{1-i}\,\frac{1}{1-\frac{w}{1-i}}.$$

现在已经配成几何级数：

$$\frac{1}{1-q} = \sum_{n=0}^{\infty} q^n.$$

这里：

$$q = \frac{w}{1-i}.$$

因此：

$$\boxed{\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-i)^n}{(1-i)^{n+1}}, \qquad |z-i| < \sqrt{2}.}$$

条件来自：

$$\left|\frac{w}{1-i}\right| < 1.$$

这道题的通用步骤是：

$$\boxed{w = z - a \;\longrightarrow\; \text{改写分母} \;\longrightarrow\; \frac{1}{1-q} \;\longrightarrow\; |q| < 1.}$$

这是必须练熟的计算方法。

比如习题 3（1）：

$$\frac{z-1}{z+1}, \qquad a = 1.$$

令 $w = z - 1$，则：

$$\frac{z-1}{z+1}=\frac{w}{w+2}=\frac{w}{2}\frac{1}{1+w/2}.$$

因此：

$$\boxed{\frac{z-1}{z+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2^n}(z-1)^n,\qquad |z-1|<2.}$$

中心不在零的题，先换成 w，通常能让运算清楚很多。

4.2 / 06 · 第85—86页

指数与三角函数的组合展开

直接把两套无穷级数相乘也能做，但教材用了更省事的办法：

$$\cos z+i\sin z=e^{iz}.$$

所以：

$$e^{z}(\cos z+i\sin z)=e^{(1+i)z},$$

以及：

$$e^{z}(\cos z-i\sin z)=e^{(1-i)z}.$$

分别展开：

$$e^{(1+i)z}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1+i)^n}{n!}z^n,$$

$$e^{(1-i)z}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1-i)^n}{n!}z^n.$$

两式相加除以 2：

$$e^{z}\cos z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1+i)^n+(1-i)^n}{2n!}z^n.$$

由于：

$$1\pm i=\sqrt{2}\,e^{\pm i\pi/4},$$

可化为：

$$\boxed{e^z\cos z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{n/2}\cos(n\pi/4)}{n!}z^n.}$$

两式相减除以 $2i$：

$$\boxed{e^z\sin z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{n/2}\sin(n\pi/4)}{n!}z^n.}$$

两个展开都在全平面成立。

这道例题要学什么？

要学“把组合函数改写成更容易展开的函数”。

这里还有一个细节：**z 是复数时，不要直接把 $e^z\cos z$ 当成 $e^{(1+i)z}$ 的实部。** 教材采用两个等式相加减，才是这里可靠的操作。

其他改写也一样好用。比如习题 2（3）：

$$\sin^2 z=\frac{1-\cos 2z}{2}.$$

于是直接得到：

$$\boxed{\sin^2 z=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}2^{2n-1}}{(2n)!}z^{2n}=z^2-\frac{z^4}{3}+\frac{2z^6}{45}-\cdots.}$$

级数的平方不能把每项直接平方，交叉项不能丢。 用三角恒等式改写，就省去了处理交叉项的麻烦。

对数函数的展开与分支

教材讨论在 $z=0$ 附近、取值满足 $\log(1)=0$ 的那个解析分支。

第一轮先抓住：

> 复对数不同分支的值，可能相差 $2k\pi i$。展开之前，要知道你选择的是哪个分支。

从几何级数出发：

$$\frac{1}{1+z}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n,\qquad |z|<1.$$

从 0 到 z 逐项积分：

$$\log(1+z)=\int_0^z \frac{d\zeta}{1+\zeta}.$$

所以：

$$\log(1+z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{n+1}}{n+1}.$$

换一下编号：

$$\boxed{\log(1+z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}z^n=z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-\cdots,\quad |z|<1.}$$

为什么 $R=1$？

因为距离中心 0 最近的真正障碍在：

$$z=-1.$$

其他分支只需要改变常数项：

$$\boxed{\log_k(1+z)=2k\pi i+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}z^n.}$$

做题掌握要求：

- 熟记这个展开；
- 知道它可以由几何级数积分得到；
- 题目指定其他分支时，注意常数项；
- 首次学习不必在这里把整个对数分支理论重新展开。

逐项积分还直接解决习题 2 的两道题：

$$\boxed{\int_0^z e^{\zeta^2}\,d\zeta=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)n!},}$$

$$\boxed{\int_0^z \frac{\sin\zeta}{\zeta}\,d\zeta=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!}.}$$

两式都可在全平面理解为相应解析函数的积分；第二式中原点的洞可以补上。

4.2 / 08 · 第87页

零点阶数及其判别

假设：

$$f(a)=0,$$

而且 f 在 a 附近解析、不是恒等于零。

它的泰勒展开可能是：

$$f(z)=c_m(z-a)^m+c_{m+1}(z-a)^{m+1}+\cdots,\qquad c_m\neq 0.$$

也就是说：

$$c_0=c_1=\cdots=c_{m-1}=0,\qquad c_m\neq 0.$$

那么称：

$$\boxed{a\text{ 是 }f\text{ 的 }m\text{ 阶零点。}}$$

最直接的读法：

> 找展开式中第一个系数非零的项，它的幂次就是零点阶数。

例如教材的：

$$f(z)=z-\sin z.$$

由于：

$$\sin z=z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\cdots,$$

所以：

$$z-\sin z=\frac{z^3}{3!}-\frac{z^5}{5!}+\cdots.$$

第一项是 $z^3/6$，因此：

$$\boxed{0\text{ 是 }z-\sin z\text{ 的三阶零点。}}$$

教材中接着给出两种等价判断。

判断 1：提出完整的零因子。

$$\boxed{f(z)=(z-a)^m g(z),\quad g\text{ 在 }a\text{ 解析},\quad g(a)\neq 0.}$$

例如：

$$z-\sin z=z^3\left(\frac{1}{6}-\frac{z^2}{120}+\cdots\right).$$

括号在 0 点不为零，因此零点恰好三阶。

判断 2：看导数第一次在哪里不为零。

$$\boxed{f(a)=f'(a)=\cdots=f^{(m-1)}(a)=0,\qquad f^{(m)}(a)\neq 0.}$$

它与前面的系数公式：

$$c_m=\frac{f^{(m)}(a)}{m!}$$

完全一致。

做题时选方便的判断，不必三种都做一遍。

常用模板应熟悉：

$$\begin{aligned}
\sin z&=z+\cdots && \Rightarrow \text{在 } 0 \text{ 是一阶零点},\\
1-\cos z&=\frac{z^2}{2}+\cdots && \Rightarrow \text{在 } 0 \text{ 是二阶零点},\\
e^z-1&=z+\cdots && \Rightarrow \text{在 } 0 \text{ 是一阶零点},\\
e^z-1-z&=\frac{z^2}{2}+\cdots && \Rightarrow \text{在 } 0 \text{ 是二阶零点},\\
z-\sin z&=\frac{z^3}{6}+\cdots && \Rightarrow \text{在 } 0 \text{ 是三阶零点}.
\end{aligned}$$

为什么零点阶数在这里必须讲？

因为下一节判断极点时，基本上就是：

$$\boxed{\text{分母的零点阶数}-\text{分子的零点阶数}.}$$

这部分对做题非常直接。

例如：

$$\frac{1-\cos z}{z^4}=\frac{z^2/2+\cdots}{z^4}=\frac{1}{2z^2}+\cdots.$$

分子抵消了两阶，最后只剩二阶极点。

4.2 / 09 · 本节应用

比较系数与递推关系

这直接对应习题 4。

已知：

$$\frac{1}{1-z-z^2}=\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n.$$

不必反复求导。两边乘 $1-z-z^2$：

$$(1-z-z^2)\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n=1.$$

比较同次幂系数：

- 常数项：$c_0=1$；
- 一次项：$c_1-c_0=0$，所以 $c_1=1$；
- 更高次项：

$$c_{n+2}-c_{n+1}-c_n=0.$$

因此：

$$\boxed{c_{n+2}=c_{n+1}+c_n.}$$

前五项就是：

$$\boxed{1+z+2z^2+3z^3+5z^4+\cdots.}$$

最近的分母零点距离原点：

$$\boxed{R=\frac{\sqrt{5}-1}{2}.}$$

这类题的套路是：

$$\boxed{\text{先消分母，再比较同次幂系数。}}$$

习题 2（5）的 $\tan z$ 也可以这样做。设：

$$\tan z=c_1z+c_3z^3+c_5z^5+c_7z^7+\cdots,$$

代入：

$$\cos z\cdot\tan z=\sin z,$$

逐次比较系数，得到：

$$\boxed{\tan z = z + \frac{z^3}{3} + \frac{2z^5}{15} + \frac{17z^7}{315} + \cdots.}$$

最近的余弦零点为 $\pm\pi/2$，因此收敛半径为 $R = \pi/2$。

第四章 / 4.3

解析函数的罗朗展开

教材印刷页 87—96 · 本节目标 根据圆环选择展开方式，理解系数与奇点附近的结构。

4.3 / 01 · 本节应用

罗朗级数与负整数次幂

第 87—88 页开头：为什么还需要另一种展开?

泰勒展开只有:

$$1, \quad z-a, \quad (z-a)^2, \dots$$

这些非负整数次幂。

但是:

$$\frac{1}{z-a}$$

在 a 点就无法写成一个在中心附近成立的普通泰勒级数。

怎么办?

允许使用:

$$(z-a)^{-1}, \quad (z-a)^{-2}, \dots$$

于是得到罗朗级数:

$$\boxed{f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n.}$$

把它拆开看:

$$\boxed{f(z) = \underbrace{\frac{a_{-1}}{z-a} + \frac{a_{-2}}{(z-a)^2} + \cdots}_{\text{负幂部分}} + \underbrace{a_0 + a_1(z-a) + a_2(z-a)^2 + \cdots}_{\text{非负幂部分}}.}$$

罗朗级数就是允许负整数次幂的展开。

但不是允许任何幂。例如：

$$(z-a)^{1/2}$$

涉及分支，不能直接当成本章这种普通罗朗级数中的一项。

4.3 / 02 · 第88—89页

收敛圆环的来源

正幂部分：

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$$

通常要求离中心不要太远：

$$|z-a| < R.$$

负幂部分：

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_{-m}}{(z-a)^m}$$

可以令：

$$w = \frac{1}{z-a}.$$

它就变成关于 w 的普通幂级数：

$$\sum_{m=1}^{\infty} a_{-m} w^m.$$

要求 w 不要太大，换回 z，就是离中心不要太近：

$$|z-a| > r.$$

两边都要成立，因此取交集：

$$\boxed{r < |z-a| < R.}$$

这就是**收敛圆环**。

你可以这样记：

- 正幂部分限制外边界；
- 负幂部分限制内边界；
- 罗朗级数要两部分分别收敛。

这里的双向无穷求和，不是在允许你随便把两端重新配对抵消。

特殊情况也包括在内：

- $r = 0$：去掉中心的圆；
- $R = \infty$：向外无限延伸的圆环；
- 两者同时出现：整个去心平面。

4.3 / 03 · 第89—91页

罗朗定理与系数唯一性

定理说：

如果 f 在圆环

$$r < |z - a| < R$$

内单值解析，那么在这个圆环中：

$$\boxed{f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n.}$$

系数是：

$$\boxed{a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}}\, d\zeta, \qquad n \in \mathbb{Z}.}$$

这里 C 要位于圆环中，正向绕中心一周。

中心 a 本身可以不解析，甚至可以不属于定义域。 只要圆环内部解析，就能使用定理。

因此，在中心是奇点时，不能再用：

$$a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

硬求系数，因为中心的那些导数可能根本没有定义。

教材证明的结构仍然来自柯西积分公式。

选两个同心圆：

- C_1 在 z 的内侧；
- C_2 在 z 的外侧。

两条圆都按逆时针方向记，则：

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta-\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta.$$

外圆上：

$$|z-a|<|\zeta-a|,$$

所以像泰勒证明一样，展开出 $(z-a)$ 的非负次幂。

内圆上：

$$|\zeta-a|<|z-a|,$$

就反过来配：

$$\frac{1}{\zeta-z}=-\frac{1}{z-a}\frac{1}{1-\frac{\zeta-a}{z-a}},$$

从而展开出 $(z-a)$ 的负次幂。

外圆贡献非负幂，内圆贡献负幂。

这就是整段证明最值得记住的结构。

教材随后证明展开唯一。核心积分是：

$$\boxed{\oint_C (z-a)^m\,dz=\begin{cases}2\pi i, & m=-1,\\ 0, & m\in\mathbb{Z},\ m\neq -1.\end{cases}}$$

如果要提取 a_k，就在展开式两边乘：

$$(z-a)^{-k-1}$$

再积分，只有 a_k 那一项留下。

因此：

$$\boxed{\text{同中心、同一圆环中的罗朗展开唯一。}}$$

为什么这个“同一圆环”必须说？

因为换圆环，展开式可能完全不同。下一道例题就是这件事。

这里也提前指出一个与第五章的联系：

$$a_{-1}=\frac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)\,dz.$$

第五章的留数，就是这个负一次幂系数。 所以罗朗展开不只是换一种写法，它会直接变成积分计算工具。

4.3 / 04 · 第92页

孤立奇点与去心邻域

假设：

$$0<|z-a|<\rho$$

内每个点都解析，只有中心 a 不解析，那么 a 是孤立奇点。

“孤立”的意思是：

> 能在它周围画一个足够小的去心圆，里面找不到其他奇点。

这种去掉中心的小圆，就是**去心邻域**。

例如：

$$\frac{1}{z-a}$$

在 a 附近，除了 a 自己，没有别的奇点。因此它是孤立奇点。

但教材给的：

$$f(z)=\frac{1}{\sin(1/z)}$$

情况不同。

它在：

$$z_n=\frac{1}{n\pi},\qquad n=\pm1,\pm2,\dots$$

有奇点，而且：

$$z_n\to 0.$$

因此，不管在 0 周围画多小的去心圆，里面都会出现其他奇点。

所以：

$$\boxed{0\text{ 是非孤立奇点。}}$$

后面可去、极点、本性这三分法，针对的是孤立奇点。必须先检查“孤立”。

4.3 / 05 · 本节应用

分式向内和向外的展开规则

先把最常用的规则讲透。

设要以 a 为中心展开：

$$\frac{1}{z-b}.$$

令：

$$w=z-a,\qquad d=b-a.$$

则：

$$\frac{1}{z-b}=\frac{1}{w-d}.$$

在内侧： $|w|<|d|$。

提出常数 $-d$：

$$\frac{1}{w-d}=-\frac{1}{d}\frac{1}{1-w/d}.$$

因此：

$$\boxed{\frac{1}{w-d}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{w^n}{d^{n+1}},\qquad |w|<|d|.}$$

得到的是非负次幂。

在外侧： $|w|>|d|$。

提出变量 w：

$$\frac{1}{w-d}=\frac{1}{w}\frac{1}{1-d/w}.$$

因此：

$$\boxed{\frac{1}{w-d}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{d^n}{w^{n+1}},\qquad |w|>|d|.}$$

得到的是负次幂。

这两种展开来自同一条几何级数公式。

它们都来自：

$$\frac{1}{1-q}=\sum q^n,\qquad |q|<1.$$

区别只是：哪个量除以哪个量，才能让模小于 1。

做题时最重要的顺序是：

$$\boxed{\text{先看区域}\ \longrightarrow\ \text{决定怎样提因子}\ \longrightarrow\ \text{配几何级数.}}$$

4.3 / 06 · 第92—93页

同一函数在五个区域的展开

教材函数是：

$$f(z)=\frac{1}{z^2-3z+2}=\frac{1}{(z-1)(z-2)}.$$

先部分分式分解：

$$\boxed{f(z)=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1}.}$$

两个奇点在：

$$1,\qquad 2.$$

以 0 为中心，到它们的距离分别是 1 和 2，所以自然分成三个区域：

$$|z|<1,\qquad 1<|z|<2,\qquad |z|>2.$$

下面不仅做教材要求的外环，也把内圆、中间圆环一起做掉。它们能把方法串起来。

区域一：$|z|<1$。

对两项来说，都位于相应奇点的内侧：

$$\frac{1}{z-2}=-\frac{1}{2}\frac{1}{1-z/2}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}},$$

$$-\frac{1}{z-1}=\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty}z^n.$$

因此：

$$\boxed{f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)z^n,\qquad |z|<1.}$$

这个区域包含中心，展开没有负幂，因此也是泰勒展开。

区域二： $1<|z|<2$。

对奇点 2，仍在内侧：

$$\frac{1}{z-2}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}.$$

对奇点 1，已经在外侧：

$$\frac{1}{z-1}=\frac{1}{z}\frac{1}{1-1/z}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}.$$

所以：

$$\boxed{f(z)=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}},\qquad 1<|z|<2.}$$

现在同时出现了正幂和负幂。

区域三： $|z|>2$。

对两个奇点都在外侧：

$$\frac{1}{z-2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{z^{n+1}},$$

$$\frac{1}{z-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}.$$

因此：

$$\boxed{f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n-1}{z^{n+1}},\qquad |z|>2.}$$

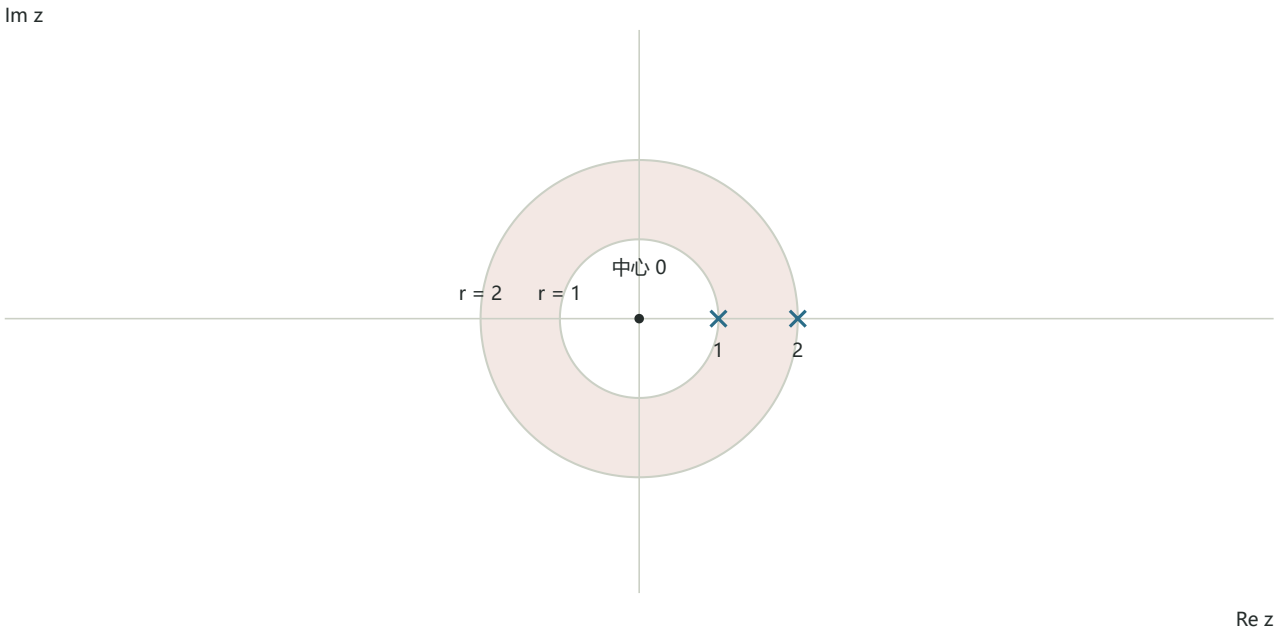
注意 $n=0$ 项为零，所以开头其实是：

$$f(z)=\frac{1}{z^2}+\frac{3}{z^3}+\frac{7}{z^4}+\cdots.$$

同一个函数，三个区域，三种展开。

下面切换区域，可以看见每个展开式究竟覆盖哪里：

图 4-4 罗朗展开的同心圆环



罗朗展开区域 中心 0：1 < |z| < 2；一项展开成 z 的非负次幂，另一项展开成负次幂。

教材还要求在 $z=1$ 附近展开。

这时中心变了，要令：

$$w=z-1.$$

于是：

$$f(z)=\frac{1}{w(w-1)}.$$

在：

$$0<|w|<1$$

内：

$$\frac{1}{w(w-1)} = -\frac{1}{w}\frac{1}{1-w}.$$

因此：

$$\boxed{f(z) = -\frac{1}{z-1} - 1 - (z-1) - (z-1)^2 - \cdots, \quad 0 < |z-1| < 1.}$$

如果改到外环：

$$|w| > 1,$$

则：

$$\frac{1}{w(w-1)} = \frac{1}{w^2}\frac{1}{1-1/w},$$

所以：

$$\boxed{f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(z-1)^{n+2}}, \qquad |z-1| > 1.}$$

这里要提前指出一个非常重要的限制：

判断中心的奇点类型，必须用贴着中心的去心邻域展开。

上面外环展开有无限多个负幂，但中心 $z=1$ 实际上只是一阶极点。你不能拿远离中心的外环展开，判断中心附近的奇异性。

4.3 / 07 · 第93—94页

复合三角函数的罗朗展开

还是先换中心：

$$w = z - 1.$$

则：

$$\frac{z}{z-1} = \frac{w+1}{w} = 1 + \frac{1}{w}.$$

利用正弦加法公式：

$$\sin\left(1+\frac{1}{w}\right)=\sin 1\cos\frac{1}{w}+\cos 1\sin\frac{1}{w}.$$

代入基础展开：

$$\cos\frac{1}{w}=1-\frac{1}{2!w^2}+\frac{1}{4!w^4}-\cdots,$$

$$\sin\frac{1}{w}=\frac{1}{w}-\frac{1}{3!w^3}+\frac{1}{5!w^5}-\cdots.$$

所以：

$$\boxed{\sin\frac{z}{z-1}=\sin 1+\frac{\cos 1}{z-1}-\frac{\sin 1}{2!(z-1)^2}-\frac{\cos 1}{3!(z-1)^3}+\cdots.}$$

成立范围：

$$\boxed{0<|z-1|<\infty.}$$

因为正弦、余弦的基础展开对任意有限输入都成立，而这里唯一排除的是 $w=0$。

这道题训练的是：

$$\boxed{\text{平移中心}+\text{代数拆分}+\text{加法公式}+\text{代入已知级数}.}$$

不需要用罗朗系数积分公式一项一项去积。

4.3 / 08 · 第94—96页

贝塞尔函数与系数的两种表示

教材研究：

$$F(z)=\exp\left\{\frac{t}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right\},\qquad z\neq 0,$$

其中 t 是实参数。

它在整个去心平面解析，因此可以展开成：

$$F(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n(t)z^n.$$

这道例题的目的，是展示：

> 同一个罗朗系数，既能通过积分得到，也能通过相乘后的同次幂合并得到。两种结果相等，就产生特殊函数的表示公式。

方法一：用系数积分公式。

$$a_n(t) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} \frac{F(z)}{z^{n+1}}\, dz.$$

单位圆参数化：

$$z = e^{i\theta}, \qquad dz = ie^{i\theta}\, d\theta.$$

而：

$$z - \frac{1}{z} = 2i \sin\theta.$$

所以：

$$\boxed{a_n(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(t\sin\theta - n\theta)}\, d\theta.}$$

这里参数化后，前面的 i 已经被 dz 中的 i 抵消。对照教材中第 94 页时，这一行应使用 $1/(2\pi)$。

把指数拆成余弦和正弦：

$$e^{iu} = \cos u + i \sin u.$$

其中正弦积分为零。原因是作：

$$\theta \mapsto 2\pi - \theta$$

后，被积函数变号，因此积分等于自己的相反数。

于是：

$$\boxed{a_n(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(t\sin\theta - n\theta)\, d\theta.}$$

方法二：拆成两个指数级数相乘。

$$F(z) = e^{tz/2} e^{-t/(2z)}.$$

分别展开：

$$e^{tz/2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t/2)^k}{k!} z^k,$$

$$e^{-t/(2z)} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(-1)^\ell (t/2)^\ell}{\ell!} z^{-\ell}.$$

两项相乘产生的幂次是：

$$z^{k-\ell}.$$

要找 z^n 的系数，就令：

$$k - \ell = n.$$

当 $n \geq 0$ 时，$k = n + \ell$，于是：

$$\boxed{a_n(t) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(-1)^\ell}{\ell!(n+\ell)!} \left(\frac{t}{2}\right)^{n+2\ell}.}$$

这个函数被记作：

$$\boxed{J_n(t).}$$

也就是整数阶第一类贝塞尔函数。

负指标满足：

$$\boxed{J_{-n}(t) = (-1)^n J_n(t).}$$

因此：

$$\boxed{\exp\left\{\frac{t}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(t) z^n.}$$

再利用罗朗展开的唯一性，把两种系数表示对应起来：

$$\boxed{J_n(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(t \sin\theta - n\theta)\, d\theta.}$$

教材最后说 J_n 关于 t 的幂级数收敛半径为无穷大。看相邻非零项的比值：

$$\frac{|t|^2}{4(\ell+1)(n+\ell+1)} \longrightarrow 0,$$

就能理解这个结论。

这一大段到底要学成什么样？

- **必须理解**：合并同次幂时，令 $k - \ell = n$。
- **应当理解**：同一个系数的两种表示为何可以相等。
- **可以暂缓熟记**：贝塞尔函数的积分式和完整系数式。

它出现在这里，是给后面的数学物理问题准备特殊函数，同时演示罗朗展开的用途。**做本章普通有理函数展开、奇点分类题，不需要先把贝塞尔公式背熟。**

第四章 / 4.4

孤立奇点的分类

教材印刷页 96—103 · 本节目标 判断孤立性，分类有限点和无穷远点，并确定极点阶数。

4.4 / 01 · 本节应用

主部与孤立奇点的三种类型

第 96—97 页：先把“主要部分”这个术语说清楚

在贴着中心 a 的去心邻域：

$$0<|z-a|<\rho$$

中，设：

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n(z-a)^n.$$

教材把负幂部分：

$$\frac{a_{-1}}{z-a}+\frac{a_{-2}}{(z-a)^2}+\cdots$$

称为**主要部分**，也常叫主部。

非负幂部分称为**正则部分**。

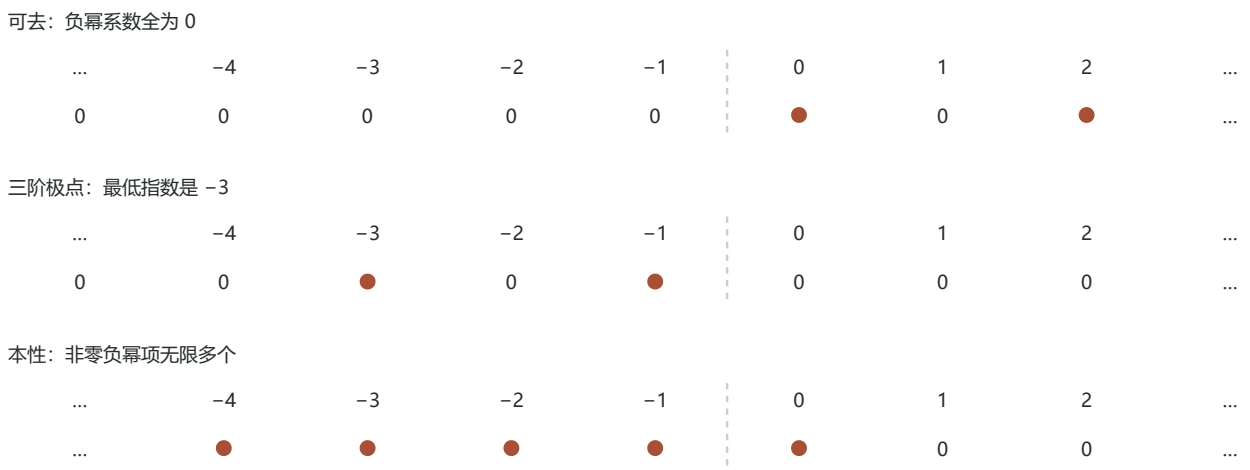
这里的“主要”是在说：**它决定中心附近的奇异性**。

分类规则只有三条：

$$\boxed{\begin{array}{ll}\text{没有非零负幂项} & \Rightarrow \text{可去奇点},\\ \text{只有有限个非零负幂项} & \Rightarrow \text{极点},\\ \text{有无限多个非零负幂项} & \Rightarrow \text{本性奇点}.\end{array}}$$

下面把负幂系数的位置画出来：

图 4-5 负幂系数与奇点分类



对极点，还要找**最低的非零幂次**。

例如：

$$f(z)=\frac{1}{z^3}+\frac{2}{z}$$

是三阶极点。

它只有两项非零负幂，但阶数是 3。

> 极点阶数不是负幂项的个数。

4.4 / 02 · 第97—98页

可去奇点与有界判别

假设中心 a 原来没有定义，或者取值不对，但：

$$f(z)=a_0+a_1(z-a)+a_2(z-a)^2+\cdots$$

没有负幂项。

那么只要补：

$$f(a)=a_0,$$

它就成为在 a 解析的函数。

所以叫“可去”。

教材例子：

$$f(z)=\frac{\sin z}{z}.$$

在 0 处原式没有定义，但：

$$\frac{\sin z}{z}=1-\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}-\cdots.$$

没有负幂项，因此：

$$\boxed{0\text{ 是可去奇点，补 }f(0)=1.}$$

教材中随后给出两个非常实用的等价条件。

在**已经知道 a 是孤立奇点**的前提下：

$$\boxed{a\text{ 可去}\iff f\text{ 在某个去心邻域有界.}}$$

也等价于：

$$\boxed{\lim_{z\to a}f(z)=L\quad\text{存在且有限.}}$$

做题最方便的往往是求有限极限。

例如：

$$\lim_{z\to 0}\frac{e^z-1}{z}=1,$$

所以 0 可去。

但“有界”必须是在整个复去心邻域有界。**只沿实轴看见有界，不能直接套定理。**

教材证明有界条件时，核心是估计负幂系数。

取一个很小的圆：

$$|z-a|=r,$$

若 $|f(z)|\le M$，则对 $m\ge 1$：

$$|a_{-m}|\le Mr^m.$$

让 $r\to 0$，就得到：

$$a_{-m}=0.$$

所有负幂系数都消失，因此可去。

这段证明的用途：解释为什么“有界”足以排除所有奇异负幂。会理解这一步即可，不必首次就熟练复现全部积分估计。

4.4 / 03 · 第98—100页

极点阶数与零点抵消

教材的等价条件是：

$$\boxed{a\text{ 是 }m\text{ 阶极点}\iff f(z)=\frac{\varphi(z)}{(z-a)^m},}$$

其中：

$$\varphi\text{ 在 }a\text{ 解析},\qquad \varphi(a)\neq 0.$$

也就是说，已经把所有能抵消的零因子抵消完，分母最终还剩：

$$(z-a)^m.$$

因此，判断商函数时最实用的规则是：

设：

$$P(z)=(z-a)^pP_0(z),\qquad P_0(a)\neq 0,$$

$$Q(z)=(z-a)^qQ_0(z),\qquad Q_0(a)\neq 0.$$

则：

$$\frac{P(z)}{Q(z)}=(z-a)^{p-q}\frac{P_0(z)}{Q_0(z)}.$$

于是：

$$\boxed{\begin{cases}q>p: & q-p\text{ 阶极点},\\ q=p: & \text{可补成有限非零值},\\ q<p: & \text{可补成零，零点阶数为 }p-q.\end{cases}}$$

这就是为什么前面必须学零点阶数。

例如：

$$\frac{\sin z}{z^2}=\frac{z-z^3/6+\cdots}{z^2}=\frac{1}{z}-\frac{z}{6}+\cdots.$$

所以：

$$\boxed{0\text{ 是一阶极点。}}$$

虽然原式分母是 z^2，但分子抵消了一阶。

再例如：

$$\frac{1-\cos z}{z^5}=\frac{z^2/2+\cdots}{z^5},$$

因此：

$$\boxed{0\text{ 是三阶极点。}}$$

不要只看分母上的指数。

教材还给出：

$$\boxed{a\text{ 是 }f\text{ 的 }m\text{ 阶极点}\iff a\text{ 是 }1/f\text{ 补成解析函数后的 }m\text{ 阶零点.}}$$

因为：

$$f(z)=\frac{\varphi(z)}{(z-a)^m}$$

等价于：

$$\frac{1}{f(z)}=(z-a)^m\frac{1}{\varphi(z)}.$$

一个是分母中的 m 阶，一个是分子中的 m 阶。

实际判断中，还有两个好用的极限形式：

$$\boxed{\lim_{z\to a}(z-a)^m f(z)=L\neq 0\quad\Rightarrow\quad m\text{ 阶极点.}}$$

以及，在孤立奇点前提下：

$$\boxed{a\text{ 是极点}\iff |f(z)|\to\infty\quad(z\to a).}$$

这里复数的“趋于无穷”指模趋于无穷，**要求沿任意趋近方向都如此**。

仅仅发现某条路径上函数变大，还不能判断为极点。

4.4 / 04 · 第100页

本性奇点与极限判别

本性奇点的定义是：

$$\boxed{\text{局部罗朗展开中，有无限多个非零负幂项。}}$$

典型例子：

$$e^{1/z}=1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!z^2}+\frac{1}{3!z^3}+\cdots.$$

因此：

$$\boxed{0\text{ 是 }e^{1/z}\text{ 的本性奇点。}}$$

从极限角度看，在孤立奇点前提下：

$$\boxed{\text{既不存在有限极限，也不趋于无穷}\iff\text{本性奇点.}}$$

对 $e^{1/z}$：

沿正实轴 $z=x\to 0^+$：

$$e^{1/x}\to\infty.$$

沿负实轴 $z=x\to 0^-$：

$$e^{1/x}\to 0.$$

两种行为不同，既不能补成一个有限值，也不可能沿所有方向都趋于无穷。

所以是本性奇点。

这也说明：

$$\boxed{\text{无界，不等于极点。}}$$

本性奇点附近也可能无界。判断极点要求更强：整个复变量极限的模都趋于无穷。

4.4 / 05 · 第100—101页

含正弦因子的分式分类

教材函数：

$$f(z)=\frac{(z-5)\sin z}{(z-1)^2z^2(z+1)^3}.$$

先找有限候选奇点：

$$z=0,\qquad 1,\qquad -1.$$

然后逐个判断，**每个点只关心在这个点会不会变成零的因子**。

在 $z=0$：

$\sin z$ 有一阶零点，分母 z^2 有二阶零点，其余因子在 0 非零。

所以剩下：

$$2-1=1$$

阶极点。

也可以按教材写成：

$$f(z)=\frac{1}{z}\left[\frac{z-5}{(z-1)^2(z+1)^3}\frac{\sin z}{z}\right].$$

括号补好后在 0 解析，取值是：

$$-5\neq 0.$$

因此：

$$\boxed{z=0\text{ 是一阶极点。}}$$

在 $z=1$：

只有分母 $(z-1)^2$ 为零，分子：

$$(1-5)\sin 1\neq 0.$$

因此：

$$\boxed{z=1\text{ 是二阶极点。}}$$

在 $z=-1$：

分母 $(z+1)^3$ 为零，分子非零。

因此：

$$\boxed{z=-1\text{ 是三阶极点。}}$$

这类题的实际书写可以很短：

> 分子在该点的零点阶数为 p，分母为 q，故为 $q-p$ 阶极点。

前提是你确实把 p,q 判断对了。

4.4 / 06 · 第101页

复合余弦函数的本性奇点

候选点：

$$z=-i.$$

直接代入余弦展开：

$$\cos\frac{1}{z+i}=1-\frac{1}{2!(z+i)^2}+\frac{1}{4!(z+i)^4}-\cdots.$$

负幂项无限多个，而且是在：

$$0<|z+i|<\infty$$

中成立的局部展开。

所以：

$$\boxed{z=-i\text{ 是本性奇点。}}$$

注意：只出现偶数负幂，也照样是无限多个。

4.4 / 07 · 第101页

乘除规则与取倒数的条件

这一段想告诉你：

> 一个本性奇点，乘除有限阶的零因子或极点因子，通常仍保留本性。

准确地说，设 g 在 a 有本性奇点，h 在 a 附近是解析函数且不恒为零，或者只有一个有限阶极点，那么：

$$hg,\qquad \frac{g}{h}$$

在 a 仍为本性奇点。

例如：

$$z^3e^{1/z}=z^3+z^2+\frac{z}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!z}+\cdots.$$

乘 z^3 只是把幂指数整体移动三格，**无限多个负幂不会因此变成有限个**。

为什么这个结论成立?

如果乘上有限阶因子以后，函数只剩可去奇点或有限阶极点，那么再除回这个有限阶因子，原来的 g 也只能有有限阶的奇异性，与本性矛盾。

但是，教材接着谈“本性奇点取倒数”时，需要特别注意:

$$\boxed{\text{要把 } 1/g \text{ 也归为孤立本性奇点，} g \text{ 必须在某个去心邻域没有零点。}}$$

否则，倒数会引入一串其他极点。

反例正是前面出现过的:

$$g(z)=\sin(1/z).$$

它在 0 是本性奇点，但:

$$\frac{1}{g(z)}=\frac{1}{\sin(1/z)}$$

在:

$$z=\frac{1}{n\pi}\to 0$$

有无穷多个极点。

所以倒数在 0 是**非孤立奇点**，不能直接称为孤立本性奇点。

这条也影响习题 16 中涉及倒数、分母本性函数的判断：先检查商在去心邻域是否解析，再谈三分法。

4.4 / 08 · 第102页

无穷远点与倒数变换

“研究 $z=\infty$”指研究:

$$|z|\to\infty$$

时函数的行为，包括所有复方向。

教材采用代换:

$$\boxed{w=\frac{1}{z}.}$$

于是：

$$|z|\to\infty \iff |w|\to 0.$$

定义：

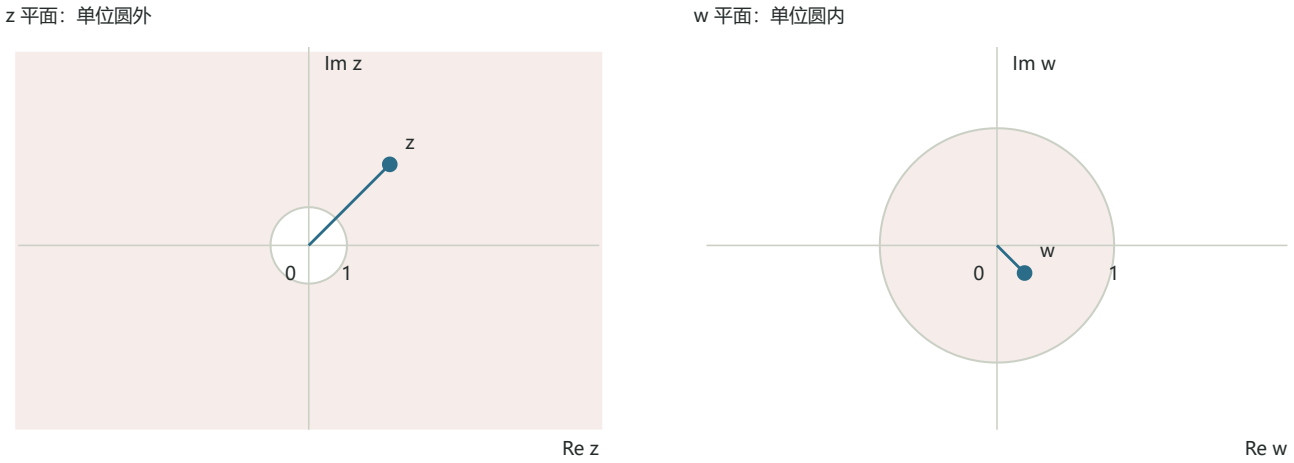
$$\boxed{F(w)=f(1/w).}$$

然后：

> f 在无穷远点是什么类型，就看 F 在 $w=0$ 是什么类型。

下面移动 z 的距离，可以看到对应的 w 向原点靠近：

图 4-6 倒数变换与无穷远点



|z| = 3.0 → |w| = 0.333

例如：

$$f(z)=z^3.$$

代换后：

$$F(w)=\frac{1}{w^3}.$$

所以：

$$\boxed{\infty \text{ 是 } z^3 \text{ 的三阶极点。}}$$

再看：

$$f(z)=\frac{1}{z^3}.$$

代换后：

$$F(w)=w^3.$$

在零点没有奇异性，补值为零。因此：

$$\boxed{\infty\text{ 是可去点，补 }f(\infty)=0.}$$

正幂和负幂的角色，在无穷远点会反过来。

4.4 / 09 · 第102—103页

无穷远点的正幂判别

假设外部区域的展开是：

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}b_nz^n,\qquad |z|>R.$$

换成 $w=1/z$：

$$F(w)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}b_nw^{-n}.$$

于是：

- z 的正幂，变成 w 的负幂；
- z 的负幂，变成 w 的正幂。

所以对无穷远点：

$$\boxed{\begin{array}{ll}\text{没有非零的 } z \text{ 正幂项} & \Rightarrow \text{可去},\\ \text{只有有限个，最高为 } z^m & \Rightarrow m \text{ 阶极点},\\ \text{有无限多个非零正幂项} & \Rightarrow \text{本性}.\end{array}}$$

仍然要先满足：无穷远点是孤立的。

几个例子一起看：

$f(z)$	$F(w)=f(1/w)$ 在 0 的情况	无穷远点
z^3	w^{-3}	三阶极点
z^{-3}	w^3	可去，补值 0
e^z	$e^{1/w}$	本性奇点
$e^{1/z}$	e^w	可去，补值 1
$\sin(1/z)$	$\sin w$	可去，补值 0
e^{-1/z^2}	e^{-w^2}	可去，补值 1

特别值得记住：

$$e^{1/z}$$

在 0 是本性奇点，在无穷远点却可去。

奇点类型是针对某个位置说的，不能给整个函数贴一个固定标签。

有理函数在无穷远点的分类

设：

$$f(z)=\frac{P(z)}{Q(z)},$$

其中：

$$\deg P=m,\qquad \deg Q=n.$$

最高次项分别是：

$$a_m z^m,\qquad b_n z^n.$$

当 $|z|$ 很大：

$$f(z)\sim \frac{a_m}{b_n}z^{m-n}.$$

因此：

$$\boxed{\begin{cases} m>n: & \infty \text{ 是 } m-n \text{ 阶极点}, \\ m=n: & \infty \text{ 可去，补值 } a_m/b_n, \\ m<n: & \infty \text{ 可去，补值 } 0. \end{cases}}$$

教材的例子：

$$f(z)=\frac{z}{z^2+1}.$$

分子一次，分母二次，所以：

$$f(z)\to 0.$$

因此：

$$\boxed{\infty \text{ 可去，补值 } 0.}$$

如果是：

$$f(z)=\frac{z^5+1}{z^2+3},$$

则：

$$5-2=3,$$

所以无穷远点是三阶极点。

这类题不用长除法算完整展开，次数已经足够回答类型与阶数。

教材还提到：

- 非常数 m 次多项式，在无穷远点有 m 阶极点；
- e^z 在无穷远点有本性奇点。

比如 e^z 沿正实轴趋于无穷，沿负实轴趋于零，因此不能因为一个方向上变大，就判为极点。

4.4 / 11 · 本节应用

无穷远点的孤立性检查

教材定义无穷远点是孤立奇点时，要求存在某个 R，使：

$$f(z) \text{ 在 } |z|>R \text{ 内解析}.$$

也就是：

能不能画一个足够大的圆，把所有其他奇点都关在里面?

如果总有奇点跑到任意远的地方，无穷远点就是非孤立奇点。

例如:

$$f(z)=\frac{1}{\cos z}.$$

它在:

$$z=\frac{\pi}{2}+k\pi,\qquad k\in\mathbb{Z}$$

有极点。这些极点可以离原点任意远。

所以:

$$\boxed{\infty\text{是非孤立奇点。}}$$

同样:

$$\tan z$$

在无穷远点也是非孤立奇点。

还有:

$$\frac{1}{1-e^{z}}$$

在:

$$z=2k\pi i$$

有极点，这些极点也会跑向无穷远。

因此无穷远点仍然非孤立。

不要看见“极限不存在”，就立刻判本性。顺序必须是:

$$\boxed{\text{先检查孤立性}\longrightarrow\text{再判断可去、极点、本性.}}$$

第四章 / 练习

练习与解题索引

教材印刷页 103—107 · 本节目标 按题型选择方法，通过分层练习检查独立解题能力。

练习 / 01 · 教材习题

原书习题的解题方法索引

下面不是要求你把所有题同时做完，而是把每组题需要调用的知识对齐。

习题	主要做法	需要练到的程度
1	求收敛半径，再单独检查圆周	能完整写清条件
2	已知展开式的代入、乘除、求导、积分	能选出省事的改写
3	先令 $w=z-a$，再展开	不把中心写错
4	消分母、比较系数	能推出递推关系
带星号的 5	对生成函数求导、比较系数	先理解方法，特殊公式可后补
6	几何级数代入 $ae^{i\theta}$，取实部、虚部	会把实三角级数合并成复数级数
7	展开 e^z-1，取模后用三角不等式	会由级数证明估计
8、9	提取零点因子、比较阶数	会处理极限、乘积、和、商
10、11	按指定圆环选择正幂或负幂展开	看到区域就知道怎样配几何级数
12	以指定中心画同心圆，计算到奇点的距离	能写正确的展开区域
13	有限奇点逐个分类，并检查无穷远点	能判断是否孤立、能算极点阶数
14	作 $w=1/z$，或比较有理函数次数	不混淆零点与无穷远点
15、16	比较有限阶因子，检查抵消和孤立性	不把可能抵消的情况强行定阶

其中几种证明题，再给你说明一下怎么起手。

习题 6：三角级数为什么引入复数?

因为：

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{in\theta} = \frac{1}{1-ae^{i\theta}}, \qquad |a|<1.$$

右边分母有理化：

$$\frac{1}{1-ae^{i\theta}} = \frac{1-a\cos\theta+i\,a\sin\theta}{1-2a\cos\theta+a^2}.$$

于是取实部、虚部，就同时得到：

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos n\theta = \frac{1 - a\cos\theta}{1 - 2a\cos\theta + a^2},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a^n \sin n\theta = \frac{a\sin\theta}{1 - 2a\cos\theta + a^2}.$$

要学的是把两套三角运算合并成一个几何级数。

习题 7：指数函数估计怎么证明?

从：

$$e^z - 1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

取模：

$$|e^z - 1| \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|z|^n}{n!} = e^{|z|} - 1.$$

再用 $n! \ge (n-1)!$：

$$e^{|z|} - 1 \le |z| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|z|^{n-1}}{(n-1)!} = |z| e^{|z|}.$$

这就得到原题要求的不等式。

要学的是：复杂复数表达式取模后，常能被一个实数正项级数控制。

习题 9、15：和的阶数为什么不能一概而论?

乘积、商可以直接加减阶数，但相加要防抵消。

例如两个一阶零点函数：

$$f(z) = z, \qquad g(z) = -z + z^3.$$

它们相加：

$$f(z) + g(z) = z^3,$$

零点阶数从 1 提高到了 3。

两个同阶极点也可能抵消：

$$\frac{1}{z}+\left(-\frac{1}{z}+1\right)=1.$$

所以：

- 不同阶相加，较强的主导项通常决定结果；
- 同阶相加，必须检查首项系数是否抵消；
- 可能抵消到更高阶零点，也可能把极点完全消掉。

这就是题目中“讨论”的内容，不能随便给一个固定阶数。

练习 / 02 · 教材习题

四类题的书写流程

遇到一道题，先判断它属于哪一种。

要求泰勒展开：

$$\boxed{\text{确认中心解析}\ \to\ w=z-a\ \to\ \text{改写函数}\ \to\ \text{套基础展开}\ \to\ \text{写成立范围}.}$$

要求罗朗展开：

$$\boxed{\text{确认中心和指定圆环}\ \to\ \text{部分分式或其他拆分}\ \to\ \text{逐项决定向内、向外展开}\ \to\ \text{取各条件交集}.}$$

要求有限奇点分类：

$$\boxed{\text{找候选点}\ \to\ \text{检查孤立性}\ \to\ \text{约因子、算零点阶数或作局部罗朗展开}\ \to\ \text{给类型和极点阶数}.}$$

要求无穷远点分类：

$$\boxed{\text{先检查足够远处是否解析}\ \to\ F(w)=f(1/w)\ \to\ \text{判断}\ w=0.}$$

基础展开式、几何级数的适用条件、零点与极点的阶数、按圆环选择展开方式，这几项需要练到能独立使用。泰勒定理和罗朗定理的长证明，先掌握它们的关键逻辑；贝塞尔函数和带星号生成函数题，先掌握“求系数、比较系数”的方法，再记具体公式。

A 基础检查

自编检查题 1

通项和部分和

判断 $\sum_{n=1}^{\infty}(2^{-n}+i/n)$ 的敛散性。通项趋于零，为什么仍不能宣布收敛?

答案与解题依据

实部级数 $\sum 2^{-n}$ 收敛，虚部级数 $\sum 1/n$ 发散，因此原级数发散。通项趋于零是必要条件，不是充分条件；收敛的定义考察部分和的极限。

自编检查题 2

两种极端收敛半径

求 $\sum_{n=0}^{\infty} z^n/n!$ 和 $\sum_{n=0}^{\infty} n!z^n$ 的收敛半径。

答案与解题依据

第一式的系数比 $|a_{n+1}/a_n| = 1/(n+1) \to 0$，所以 $R = \infty$。第二式的系数比为 $n+1 \to \infty$，所以 $R = 0$，只在中心 $z = 0$ 收敛。半径公式取的是系数比极限的倒数。

自编检查题 3

同一个半径与不同边界

比较 $\sum z^n$、$\sum_{n=1}^{\infty} z^n/n$、$\sum_{n=1}^{\infty} z^n/n^2$ 在 $z = 1$ 和 $z = -1$ 的敛散性。

答案与解题依据

三个级数的半径都为 1。第一式在两个点都发散，因为通项不趋于零。第二式在 1 发散，在 -1 条件收敛。第三式在两个点都绝对收敛，且实际上在整个单位圆周上绝对收敛。仅凭半径不能判断边界。

自编检查题 4

换中心展开

把 $1/(1-z)$ 在 $a = -1$ 展开，给出一般项和收敛范围。

完整步骤

令 $w = z + 1$，则

$$\frac{1}{1-z} = \frac{1}{2-w} = \frac{1}{2}\frac{1}{1-w/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+1)^n}{2^{n+1}}, \qquad |z+1| < 2.$$

最近奇点是 $z = 1$，距离中心 -1 为 2，与几何级数条件一致。

自编检查题 5

系数与恒等式改写

求 $\sin^2 z$ 在原点展开时 z^6 的系数。说明为什么不能把正弦级数逐项平方。

答案与解题依据

利用 $\sin^2 z = (1-\cos 2z)/2$，可得 z^6 的系数为 $2/45$。平方整个和式会产生交叉项；把每一项单独平方会漏掉它们。

自编检查题 6

零点阶数

判断 $z-\sin z$ 和 e^z-1-z 在原点的零点阶数。

答案与解题依据

分别从 $z^3/6$ 和 $z^2/2$ 开始，所以零点阶数为 3 和 2。判断的是第一个非零项的幂次，不是原式中看见的最低显式幂次。

B 方法迁移

自编检查题 7

比较系数

若 $1/(1-z-z^2)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$，求 c_5，并说明收敛半径来自哪里。

完整步骤

两边乘 $1-z-z^2$，比较系数，得到 $c_0=c_1=1$、$c_{n+2}=c_{n+1}+c_n$。因此前六个系数是 $1,1,2,3,5,8$，故 $c_5=8$。分母零点为 $(-1\pm\sqrt{5})/2$，最近者到原点的距离是 $(\sqrt{5}-1)/2$，这就是收敛半径。

自编检查题 8

从展开读极点

在 $0<|z|<1$ 中展开 $1/[z^2(1-z)]$，判断原点类型，并找出负一次幂系数。

完整步骤

$$\frac{1}{z^2(1-z)} = \frac{1}{z^2}\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + 1 + z + \cdots.$$

最低非零幂次为 -2，所以原点是二阶极点。负一次幂系数为 1，它也是第五章将要使用的留数。

自编检查题 9

区域决定展开

分别在 $|z|<1$ 与 $|z|>1$ 中展开 $1/(z-1)$。外环展开有无限个负幂，能否据此断言原点是本性奇点?

完整步骤

$$\frac{1}{z-1} = -\sum_{n=0}^{\infty} z^n, \qquad |z|<1.$$

$$\frac{1}{z-1} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n-1}, \qquad |z|>1.$$

不能。原点本来就是解析点。奇点分类必须使用贴着该中心的去心邻域展开，不能使用远离中心的外环展开。

自编检查题 10

抵消后的真实阶数

判断 $(1-\cos z)/z^5$ 在原点的类型，并写出主部。

完整步骤

$$\frac{1-\cos z}{z^5} = \frac{1}{2z^3} - \frac{1}{24z} + \frac{z}{720} - \cdots.$$

原点是三阶极点。主部是 $1/(2z^3) - 1/(24z)$；缺少二次负幂并不改变三阶极点的结论。负一次幂系数为 $-1/24$。

自编检查题 11

幂次平移与本性

判断 $z^2e^{1/z}$ 在 0 和 ∞ 的类型。

完整步骤

在 0 附近，展开为 $z^2+z+1/2!+1/(3!z)+1/(4!z^2)+\cdots$，仍有无限多个非零负幂，因此是本性奇点。

在无穷远点，令 $w=1/z$，得到 $w^{-2}e^w=w^{-2}+w^{-1}+1/2!+\cdots$，故无穷远点是二阶极点。

自编检查题 12

取倒数前检查孤立性

$\sin(1/z)$ 在原点是本性奇点，为什么不能直接宣布 $1/\sin(1/z)$ 在原点也为孤立本性奇点?

答案与解题依据

分母在 $z=1/(n\pi)$ 有零点。这些点趋于原点，取倒数后变成一串极点。因此原点的任意去心邻域都含其他奇点，原点是非孤立奇点。先验孤立性，再用三分法。

C 综合判断

自编检查题 13

无穷远点的四种情况

分别判断 $z^2/(2+z^2)$、$\sec(1/z)$、$\tan z$、e^{-1/z^2} 在无穷远点的类型。

答案与解题依据

第一式可去，补值为 1。第二式代换后为 $\sec w$，在 0 解析且值为 1，所以无穷远点可去。第三式有极点 $\pi/2+k\pi$ 逃向无穷远，所以无穷远点非孤立。第四式代换后为 e^{-w^2}，无穷远点可去，补值为 1。

自编检查题 14

相加可能抵消

设 $f(z)=z^2+z^3$，$g(z)=-z^2+z^4$。判断 $f+g$、fg 的零点阶数和 f/g 在原点补好后的值。

完整步骤

$f+g=z^3+z^4$，所以是三阶零点。两函数各有二阶零点，乘积是四阶零点。商约去 z^2 后为 $(1+z)/(-1+z^2)$，在原点补值为 -1。两个相同阶零点函数的和，不一定保持原阶数。

自编检查题 15

极点相加也可能降阶

设 $f(z)=z^{-2}+z^{-1}$，$g(z)=-z^{-2}+2$。判断 $f+g$、fg、f/g 在原点的类型。

完整步骤

$f+g=z^{-1}+2$，原点为一阶极点。乘积最低幂次为 -4，且系数非零，所以是四阶极点。商可写成 $(1+z)/(-1+2z^2)$，原点可去，补值为 -1。相同阶极点相加时必须检查主部抵消。

自编检查题 16

一题串起零点展开和奇点分类

研究 $f(z)=(e^z-1-z)/[z^3(z-1)]$。求有限奇点类型，在原点附近写出前三个非零项，并判断无穷远点。

完整步骤

分子在 0 有二阶零点，分母在 0 有三阶零点，因此原点是一阶极点。在 1，分子为 $e-2\neq 0$，分母有一阶零点，所以也是一阶极点。

在 $0<|z|<1$ 中：

$$f(z)=-\left(\frac{1}{2z}+\frac{1}{6}+\frac{z}{24}+\cdots\right)(1+z+z^2+\cdots)=-\frac{1}{2z}-\frac{2}{3}-\frac{17}{24}z+\cdots.$$

展开中心是 0，外边界由另一个奇点 1 决定。无穷远点是孤立的；代换后 $e^{1/w}$ 乘有限阶因子，再减去有限阶项，仍有本性奇异性，因此无穷远点为本性奇点。

完成标准

基础题 1—6 应当能独立写出条件和理由；迁移题 7—12 应当能解释为什么选这种展开；综合题 13—16 应当先检查孤立性，再给出类型和阶数。把“只差一步”的题标出来，定位是中心、区域、系数、零点阶数还是定义前提出了问题。

教材带星号的勒让德生成函数题和贝塞尔函数例题，第一轮优先学会求导后比较系数的办法。后续课程用到具体特殊函数时，再集中熟记它们的公式。

来源与使用说明

依据严镇军《数学物理方法》复变函数部分第四章及本次完整讲解重新编排。正文对应书中第78—103页，原书习题对应第103—107页；在用户提供的教材扫描PDF中，文件页序等于印刷页码加6。自编检查题与原书习题分开编号。

讲义保留定义、定理条件、证明主线、例题步骤与适用范围。教材第94页参数化积分的系数按推导更正为1/(2π)；第101页涉及本性奇点取倒数与商时，补充去心邻域非零及孤立性条件。具体说明见4.3与4.4。

整理日期 2026年10月15日。公式、图形、样式与交互均内嵌，可离线阅读。打印时自动展开答案，并使用静态矢量图。